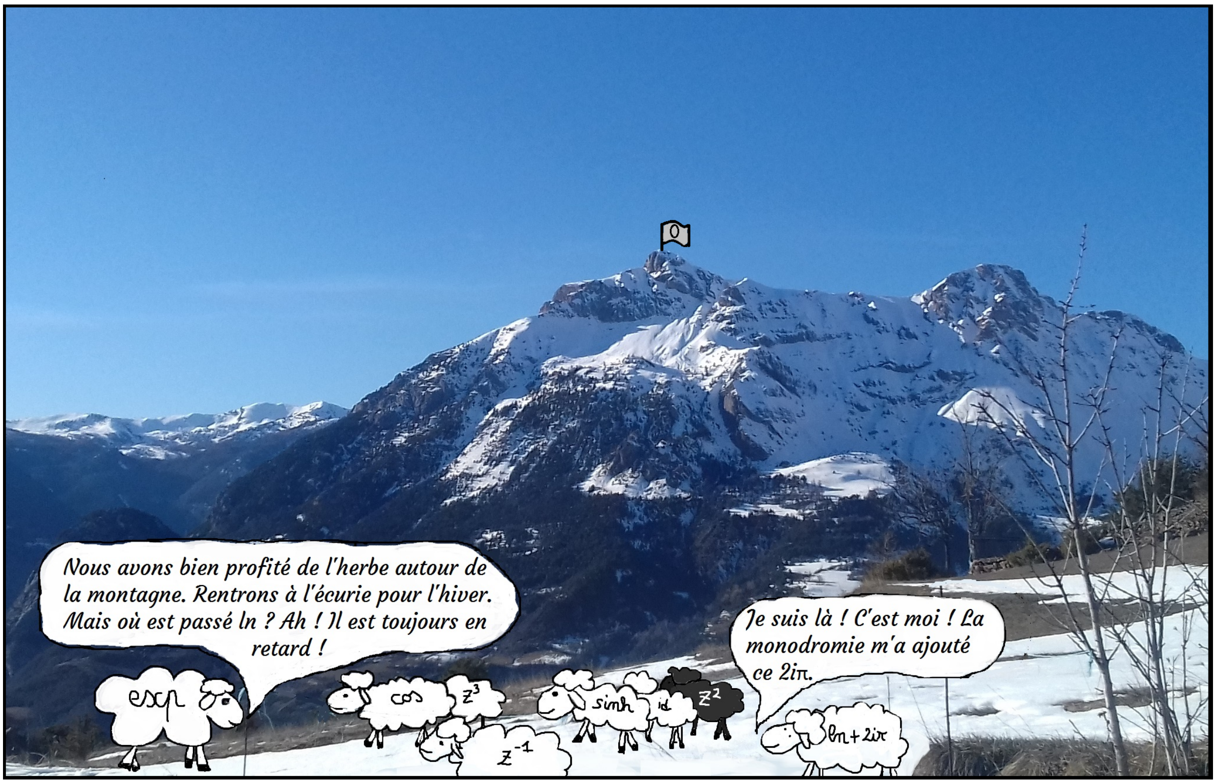
Institut Camille Jordan

Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

Équations de Mahler : groupes de Galois et singularités régulières



Marina Poulet

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale InfoMaths, ED 512

Spécialité de doctorat : Mathématiques
N. d'ordre 2021LYSE1342

Soutenue publiquement le 13 décembre 2021 par :
Marina Poulet

Équations de Mahler : groupes de Galois et singularités régulières

---

devant le jury composé de :

M. Boris Adamczewski	Directeur de recherche, Université Lyon 1	Examinateur
Mme Charlotte Hardouin	Maître de conférences, Université Toulouse 3	Examinatrice
M. Julien Roques	Professeur, Université Lyon 1	Directeur de thèse
M. Jacques-Arthur Weil	Professeur, Université de Limoges	Président du jury
M. Jiang Zeng	Professeur, Université Lyon 1	Examinateur

suite aux rapports de :

Mme Lucia Di Vizio	Directrice de recherche, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
M. Jacques-Arthur Weil	Professeur, Université de Limoges

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Julien, mon directeur de thèse. Merci de m'avoir fait découvrir avec autant de passion la théorie de Galois différentielle puis d'avoir accepté de devenir mon directeur de thèse. Sans votre soutien, vos encouragements, je ne me serais pas lancée dans cette aventure. Merci pour tout ce que vous m'avez appris, pour tous vos conseils (pour la rédaction, les exposés etc) et d'avoir toujours été présent et disponible.

Je remercie tous les membres de mon jury. Un grand merci à Lucia et Jacques-Arthur qui ont accepté de rapporter ma thèse avec tout ce que cela implique comme charge de travail, je vous en suis très reconnaissante. Merci aussi à Charlotte, Boris et Jiang d'avoir accepté d'être examinatrice et examinateurs de ma thèse. Je vous remercie de vous être rendu.e.s disponibles pour faire partie de mon jury et de l'intérêt que vous portez à mon travail.

J'ai appris beaucoup de choses durant cette thèse, tant sur le plan mathématique que personnel. Cela a été une super expérience grâce entre autres à la bonne ambiance qui règne dans les laboratoires, dans les conférences etc. Avec la crise sanitaire nous n'avons pas eu beaucoup d'occasions de nous rencontrer lors de conférences et séminaires mais je tenais à remercier tou.te.s les chercheurs et chercheuses d'avoir partagé votre savoir, votre passion lors de ces rencontres dans une très bonne ambiance, cela est précieux et c'est grâce à vous toutes et tous que le monde mathématique est une grande famille dans laquelle on peut se sentir bien.

Les échanges sont importants pour découvrir, comprendre et construire. Merci à Thomas Dreyfus pour nos discussions et l'intérêt que tu portes à mon travail. Je tiens à remercier Jacques Sauloy d'avoir répondu avec patience à toutes mes questions (et elles étaient nombreuses !) sur les groupoïdes de Galois, d'avoir lu, relu et re-relu la section qui est dédiée à l'introduction de ces groupoïdes et toutes les remarques constructives qui ont permis de rendre cela plus clair sur le papier mais aussi dans ma tête. Durant cette dernière année de thèse, j'ai eu le plaisir de pouvoir travailler avec Colin Faverjon. Nous n'avons pas eu beaucoup d'occasions de travailler en présentiel étant donné que notre travail s'est majoritairement fait durant les confinements mais malgré cela, notre collaboration restera gravée parmi les meilleurs moments mathématiques de ma thèse. J'ai découvert le travail de recherche en équipe, nos échanges ont été très constructifs, j'ai apprécié toutes ces heures de réflexion pour faire avancer notre projet et cela toujours dans la bonne humeur. Merci pour ta gentillesse, ta disponibilité.

Je remercie toutes les personnes qui ont partagé le bureau 100 avec moi pour tous ces bons moments passés dans une très bonne ambiance propice au travail mais aussi à la détente avec les nombreux fous rires, les énigmes etc. C'est un bureau plein de vie et de gaieté. Merci Vincent pour les sorties lyonnaises, la découverte de l'Ultimate ; merci Rémy pour tes pointes d'humour qui ont égayé ce bureau ; Sam pour ta bonne humeur et d'être toujours là où on ne t'attend pas ; merci Mélanie pour tous tes conseils, ta disponibilité ; merci Lola pour ta gentillesse, ton engagement ; merci Pan, João pour toutes nos discussions enrichissantes sur la langue et la culture, vous m'avez fait voyager ; merci Jorge d'être toujours présent et souriant quand j'arrive le matin. Merci Antonio et Luca pour nos quelques échanges en italien, Cheikh d'avoir rejoint notre bureau.

Je remercie aussi tou.te.s les autres doctorant.e.s de l'ICJ ! Merci pour tous les moments passés ensemble dans les couloirs et bureaux de l'ICJ mais aussi dans les salles d'escalade, lors des sorties vélo, rando, resto etc. Merci aux doctorant.e.s de mon équipe : Gwladys pour toutes nos discussions (Mahleriennes ou non), ta gentillesse, ton engagement et d'être toujours présente malgré l'éloignement ; Daniel pour ton rire inoubliable ; Quentin pour tous les fous rires. J'ai passé de super moments avec vous à l'ICJ mais aussi lors de confs inoubliables ! Merci aussi à Pan et David. Les ancien.ne.s m'ont accueillie avec tant de bienveillance et de gentillesse : merci Simon Z., Caterina, Sam pour l'escalade, les bons repas ; merci Micka pour ton risotto exceptionnel, les grandes randos et ta façon si particulière de trouver de bons spots, les soirées jeux et d'avoir toujours autant bonne blague ! Merci aussi pour tes cours de français parisien, je tâcherai de rester calme même si avec toi, on part rarement le jour où on embaste. Merci Théo et Hugo pour les randos et les discussions passionnantes à Grenoble ; merci Christian pour ton accueil à Guéthary ; merci Tingxian, Jiao, Olga, Thomas, Coline, Benjamin C., Benjamin D., Tanessi, Ariane, ... Merci à ceux et celles qui ont partagé ces 3 années avec moi et les nouvelles et nouveaux : Kyriaki, merci pour ta bonne humeur, ton sourire ; $\widehat{\text{Simon}}$ et Gauthier pour vos engagements, les repas au soleil ; merci Anatole de m'avoir assurée et montré les enchaînements afin d'atteindre les sommets des voies (et pas que à l'escalade) ; merci Garry, Mete, Shmuel, Valentin, Mouksit, Marianne, Uran, Julien, Gabriele, Godfred, Thibault, Jules, Aliaksandr, Elias, ... La liste serait trop longue mais j'espère que vous savez toutes et tous à quel point j'ai apprécié les moments passés ensemble. Vous avez contribué à la bonne ambiance qui règne au labo de l'ICJ ! Un merci bien particulier à Colin qui est presque devenu un voisin et qui a lancé l'organisation de la rencontre master/doctorant.e.s. Merci à toute l'équipe d'organisation de cette rencontre, j'ai beaucoup apprécié d'en avoir fait partie avec vous. Merci à Octave, Caterina, Dimitri et Sébastien avec qui j'ai eu la chance d'être au Bureau Des Doctorant.e.s ainsi qu'à Lola, Hugo, Clément pour votre engagement auprès de l'école doctorale. Vous êtes des personnes exceptionnelles, attentives et soucieuses du bien-être de l'ensemble des doctorant.e.s, je vous remercie pour tout !

Merci à toutes les personnes travaillant au bon fonctionnement de l'ICJ, merci pour toute l'aide apportée, le laboratoire est un endroit où il fait bon travailler et vous y êtes pour beaucoup !

J'ai passé de belles années à Lyon malgré la crise sanitaire. Des amitiés très fortes se sont tissées au fil de ces trois années et cela a permis de rencontrer les ami.e.s des ami.e.s qui sont aussi devenu.e.s des ami.e.s ! Merci Gabrielle pour ta spontanéité, ton enthousiasme et les occasions que tu trouves pour nous réunir et d'avoir un chat aussi adorable ! Une pensée particulière pour Valentine et sa famille, Célia et Thibault, Célia, Marie et Patteo, Loreena, Joëlle, Charlotte et Benoît, et tant d'autres.

Cette année j'ai eu la chance d'être accueillie à l'Institut Fourier en tant qu'ATER. Je remercie les membres du laboratoire pour leur très bon accueil. Merci Tanguy d'avoir été présent dès mon retour au labo, de ton intérêt pour mes travaux, tes conseils et tous nos moments de réflexion. Merci à tou.te.s les doctorant.e.s pour les rigolades du midi autour de sujets riches et variés. Cela m'a fait très plaisir de retrouver Séverin, Gabriel, Antoine et Manel, merci pour tous les moments passés ensemble depuis déjà pas mal d'années, de votre soutien et amitié. J'en profite pour remercier tou.te.s mes ami.e.s anciennement (et même encore parfois) grenoblois.es avec qui j'ai passé de très belles années à la fac, je pense notamment à Lina, les Thomas, Manu, Eva, Maëlle, Julia.

Je tenais à remercier tou.te.s mes professeur.e.s, un merci bien particulier à Mr Maa, Mr Joly, Mr Audibert qui m'ont transmis avec toute leur passion la beauté et les bases des mathématiques. J'espère que je reprendrai le flambeau avec autant de brio que vous ! La suite est logique : un grand merci aussi à mes étudiant.e.s, j'espère que vous avez eu autant de plaisir à découvrir les mathématiques que j'en ai eu à enseigner pour vous.

Je tenais aussi à remercier tou.te.s mes ami.e.s de longue date. Merci Dorian pour tous les fous rires, de toujours rester le même boute-en-train ! Merci Santa d'avoir toujours été présente depuis toutes ces années (Nina-Ritchy n'est pas prêt de s'arrêter). Merci aussi à Éva, Seb, Léo, Delph, Nathan, Coline, ... mais ces quelques lignes ne suffiraient absolument pas pour tou.te.s vous remercier et faire le bilan de tous ces merveilleux moments passés ensemble ! Simon, tu es mon rayon de soleil, avec toi il y a toujours un petit coin de ciel bleu et tu sais à quel point cela m'est précieux !

Pour finir, merci à toute ma famille. J'ai une pensée particulière pour chacune et chacun d'entre vous. Merci Tonton pour toute ta gentillesse, c'est toujours un plaisir de passer du temps et parler avec toi. Merci à ma sœur et à mes parents de m'avoir toujours soutenue même dans mes projets les plus fous. Papa, Maman, merci de votre amour, des valeurs que vous m'avez transmises, j'ai beaucoup de chance de vous avoir et de toujours pouvoir me ressourcer chez vous, au milieu des belles montagnes des Alpes du Sud ! Les mots me manquent pour exprimer toute ma gratitude.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux équations dites de Mahler et, en particulier, aux groupes de Galois de ces équations.

0.1 Les équations de Mahler

L'étude des équations de Mahler a débuté avec le travail de Mahler dans [Mah29, Mah30a, Mah30b]. Ces travaux sont à l'origine de la *méthode de Mahler* dont le but est d'obtenir des résultats de transcendance et d'indépendance algébrique pour des valeurs aux points algébriques des solutions de certaines équations fonctionnelles appelées équations de Mahler. Par exemple, nous savons grâce à cela que si α est un point algébrique non nul du disque unité ouvert, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$f_p(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} z^{p^n} \quad \text{et} \quad g_p(z) := \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - z^{p^n}\right) \tag{1}$$

alors $f_p(\alpha)$ et $g_p(\alpha)$ sont algébriquement indépendants. Pour montrer cela, Mahler utilise le fait que f_p et g_p sont respectivement des solutions du système

$$Y\left(z^p\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} Y(z) \quad \text{avec} \quad Y(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ f_p(z) \end{pmatrix} \tag{2}$$

et de l'équation

$$(1-z)g_p\left(z^p\right) - g_p(z) = 0\,,$$

ce sont des exemples d'équations et de systèmes de Mahler dont voici la définition.

Définition 0.1.1. Une *équation de Mahler* d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ est une équation fonctionnelle de la forme

$$a_n(z)f\left(z^{p^n}\right) + a_{n-1}(z)f\left(z^{p^{n-1}}\right) + \ldots + a_1(z)f\left(z^p\right) + a_0(z)f(z) = 0 \tag{3}$$

où $a_0(z), \ldots, a_n(z) \in \mathbb{C}(z)$, $a_0(z)a_n(z) \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Les solutions de ces équations sont des *fonctions de Mahler*.

Définition 0.1.2. Un *système de Mahler* d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ est un système de la forme

$$Y\left(z^p\right) = A(z)Y(z) \tag{4}$$

avec $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$.

La méthode de Mahler a ensuite été reprise et étendue dans les années 70 et 80, voir par exemple [Kub77, LvdP77, Mas82, Nis82, Lox84]. Pour plus de précisions sur cette théorie, nous faisons référence à [Nis96].

Depuis les années 80 et 90, l'étude des équations de Mahler a connu un regain d'intérêt notamment grâce à ses liens avec la théorie des automates finis : si $f(z) = \sum_{k\geq 0} f_k z^k$ est une série génératrice d'une suite p-automatique $(f_k)_{k\geq 0} \in \overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{N}}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\left(f(z), f\left(z^p\right), \cdots, f\left(z^{p^{n-1}}\right)\right)^\top$ est solution d'un système de Mahler d'ordre n, voir par exemple [CKMFR80, AS92, Bec94]. Ce lien est resté méconnu par les mathématicien.ne.s s'intéresssant aux équations de Mahler jusqu'en 1980 et la mise en lumière par Mendès France [MF80] de l'article [Cob68] de Cobham. Il a été par la suite très étudié et il est à l'origine de nombreux travaux sur les équations de Mahler, entre autres [Ran92, Dum93, AB17, AF17].

Ces dernières années, il y a eu de nombreux résultats sur les équations de Mahler, voir par exemple [BCZ15, AF18, CDDM18, Fer19, Pel20, Roq20]. En particulier, Philippon dans [Phi15] puis Adamczewski et Faverjon dans [AF17] ont montré que les relations algébriques entre les valeurs spéciales des fonctions de Mahler proviennent de la spécialisation des relations algébriques entre les fonctions, d'où l'importance d'étudier les relations algébriques entre les fonctions de Mahler.

0.2 Les aspects galoisiens

Les relations algébriques entre des fonctions qui sont des solutions d'une équation aux différences sont reflétées par un groupe de Galois aux différences, qui est un groupe algébrique. Grosso modo, plus ce groupe de Galois est gros, moins il y a de relations algébriques entre les solutions. La théorie de Galois aux différences permet donc d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique ou d'hypertranscendance des solutions d'équations aux différences, voir notamment [Phi15, DHR18, Roq18, ADH21]. C'est une des raisons pour lesquelles elle est devenue une aire de recherche très active. Des détails sur la théorie de Galois aux différences et ses applications sont donnés dans [vdPS97].

0.3 Principaux résultats de cette thèse

Nous rappelons que, comme pour les équations différentielles linéaires, il y a des liens entre les équations et les systèmes de Mahler. À l'équation (3), on peut associer le système de Mahler $Y\left(z^p\right) = A(z)Y(z)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, d'après le théorème du vecteur cyclique (voir Théorème 4.3.1 ou, pour un énoncé général, voir [HS99, Appendix B]), on peut associer une équation de Mahler à tout système de Mahler.

Soient

$$Y(z^p) = A(z)Y(z) \tag{5}$$

un système de Mahler et $i \in \{0, 1, \infty\}$, un point fixe de l'opérateur $z \mapsto z^p$. Dans la suite, nous considérerons principalement les systèmes de Mahler (5) tels que :

- A a des coefficients analytiques en i et $A(i) = I_n$, dans ce cas le système est dit régulier en i.
- A a des coefficients analytiques en i et $A(i) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, dans ce cas le système est dit fuchsien strict en i.
- il existe une matrice T inversible et à coefficients méromorphes en i tel que le système de Mahler $Y(z^p) = B(z)Y(z)$ avec $B(z) := T(z^p)^{-1} A(z)T(z)$ soit fuchsien strict en i, ce système est alors dit méromorphiquement équivalent en i au système (5) et T est appelée transformation de jauge. Dans ce cas, le système (5) est dit singulier régulier en i.

0.3.1 Une approche analytique des groupes de Galois des équations de Mahler

Les articles sur la théorie de Galois des équations de Mahler s'intéressent principalement aux aspects algébriques de cette théorie. Les aspects analytiques n'ont pas encore été très étudiés et l'objectif des Chapitres 2 et 3 est de les considérer afin de construire un sous-groupe Zariski-dense de nature analytique dans le groupe de Galois aux différences des équations de Mahler singulières régulières, ce dernier étant un groupe algébrique. Nous obtenons un théorème de densité qui est inspiré du théorème de densité de Schlesinger et ses analogues. Plus précisément, le théorème de densité de Schlesinger assure que le groupe de monodromie d'une équation différentielle linéaire singulière régulière à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ est Zariski-dense dans son groupe de Galois. Ce théorème a été étendu aux équations aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ qui sont régulières en 0 et ∞ par Pavel I. Etingof dans [Eti95] puis à celles qui sont singulières régulières en 0 et ∞ par Jacques Sauloy ([Sau03]) d'une part, grâce à la théorie des catégories tannakiennes, et par Marius van der Put et Michael F. Singer ([vdPS97]) d'autre part, grâce à la théorie de Picard-Vessiot.

La clé de ces extensions du théorème de Schlesinger aux équations aux q-différences est une matrice de connexion introduite par Birkhoff qui joue le rôle de la monodromie des équations différentielles. Grosso modo, il s'agit d'une matrice connectant 0 et ∞ : une base de solutions en 0 et une en ∞ sont associées à une équation aux q-différences donnée, elles sont toutes les deux composées de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^\star$ et la matrice de connexion de Birkhoff rend compte des relations linéaires entre ces deux bases de solutions sur $\mathbb{C}^\star$.

De même, à toute équation de Mahler singulière régulière en 0 et ∞, on peut associer deux bases de solutions, une attachée à 0, l'autre à l'infini. Mais un problème surgit :

la base de solutions en 0 est constituée de fonctions méromorphes sur le disque unité ouvert tandis que la base de solutions en ∞ est constituée de fonctions méromorphes sur le complémentaire du disque unité fermé. De plus, par un théorème de Randé ([Ran92, Théorèmes 4.2, 4.3], [BCR13]), le cercle unité est une frontière naturelle à ces solutions. Ces deux bases de solutions sont donc définies sur des ouverts disjoints, on ne peut pas les « connecter », ce qui était fondamental pour les équations aux q-différences comme expliqué précédemment. Afin de surmonter ce problème, l'idée clé est de faire jouer un rôle au point 1 qui, comme 0 et ∞, est un point fixe de l'opérateur de Mahler $\phi_p : z \mapsto z^p$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme nous l'avons fait en 0 et en ∞, il s'agit donc de construire une matrice fondamentale de solutions en 1. Pour cela, nous pouvons utiliser des résultats connus sur les équations aux q-différences, voir par exemple [Sau00], puisqu'une équation de Mahler peut-être transformée en une équation aux q-différences grâce au changement de variable $z = \exp(u)$. Localement, pour retourner à notre système de Mahler de départ, nous pouvons utiliser le logarithme principal ln mais pour des considérations globales, nous utiliserons un logarithme

$$\widetilde{\ln} : \widetilde{\mathbb{C}^\star} \to \mathbb{C}$$

qui est holomorphe sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ de $\mathbb{C}^\star$.

Nous considérons donc trois bases de solutions, en 0, 1 et ∞, et nous associons à chaque équation de Mahler (singulière) régulière en 0, 1 et ∞ deux matrices de connexion, une qui connecte 0 à 1 et une autre qui connecte 1 à ∞. Ces matrices vont nous permettre de construire des éléments du groupe de Galois d'une équation de Mahler (singulière) régulière et nous montrerons qu'ils engendrent un sous-groupe Zariski-dense dans ce dernier.

0.3.2 Théorème de densité de Schlesinger pour les équations de Mahler régulières

Le Chapitre 2 est consacré au théorème de densité dans le cas des équations de Mahler régulières. À l'aide de matrices fondamentales de solutions en 0, 1 et ∞, notées respectivement $\widetilde{Y}^{(0)}$, $\widetilde{Y}^{(1)}$ et $\widetilde{Y}^{(\infty)}$, nous introduisons les deux matrices de connexion de Birkhoff d'un système de Mahler régulier en 0, 1 et ∞ dans la Section 2.2 :

- $\widetilde{C}^{(0)}$ dont les coefficients sont méromorphes sur la partie Σ_0 de $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ correspondant au disque unité ouvert et épointé en 0 de $\mathbb{C}^\star$;
- $\widetilde{C}^{(\infty)}$ dont les coefficients sont méromorphes sur la partie Σ_∞ de $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ correspondant au complémentaire dans $\mathbb{C}$ du disque unité fermé.

Dans la Section 2.3, nous construisons des extensions de Picard-Vessiot notées L_0, L_1 et L_∞ qui sont des extensions du corps de base k engendrées par les coefficients de $\widetilde{Y}^{(0)}$, $\widetilde{Y}^{(1)}$ et $\widetilde{Y}^{(\infty)}$ respectivement (voir les précisions dans la Section 2.3.1). Nous notons G le groupe de Galois du système de Mahler régulier en 0, 1 et ∞ considéré. Soit $i \in \{0, \infty\}$. Si $\widetilde{u} \in \Sigma_i$ n'est pas un pôle de $\widetilde{C}^{(i)}$, nous considérons l'unique morphisme de k-algèbres

$$\tau_{\widetilde{u}}^{(i)} : L_i \to L_1$$

qui associe à chaque coefficient de $\widetilde{Y}^{(i)}$ le coefficient correspondant de $\widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u})$ (voir le Théorème 2.3.10). Grâce à la théorie de Picard-Vessiot, nous obtenons l'analogue du théorème de densité de Schlesinger pour les équations régulières, Théorème 2.3.12 :

Théorème. *Soit* Γ *le groupe engendré par l'ensemble des applications*

$$\tau^{(0)}_{\widetilde{v}}\tau^{(0)^{-1}}_{\widetilde{u}} \quad et \quad \tau^{(\infty)}_{\widetilde{y}}\tau^{(\infty)^{-1}}_{\widetilde{x}}$$

où $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \Sigma_0$ *et* $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \Sigma_\infty$ *sont tels que* $\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{u})$, $\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{v})$, $\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{x})$ *et* $\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{y})$ *sont définies et inversibles. Le groupe* Γ *est Zariski-dense dans le groupe de Galois* G *:*

$$G = \overline{\Gamma}.$$

0.3.3 Théorème de densité de Schlesinger pour les équations de Mahler singulières régulières

Le Chapitre 3 étend le Théorème 2.3.12 au cas des équations de Mahler singulières régulières. Il a donné lieu à l'article [Pou21]. Pour la généralisation du théorème de densité de Schlesinger aux équations aux q-différences, les deux approches utlisées sont les suivantes :

- l'utilisation de symboles avec la théorie de Picard-Vessiot, voir [vdPS97, Chapter 12] ;
- l'utilisation de solutions analytiques avec la théorie des catégories tannakiennes, voir [Sau03].

Afin de travailler avec des fonctions analytiques, nous utilisons la théorie des catégories tannakiennes (dont nous faisons des rappels en Annexe A) pour étendre le Théorème 2.3.12. Cela fournit donc une nouvelle démonstration de ce théorème.

Nous montrons dans la Section 3.3 que la catégorie $\mathcal{E}$ des équations de Mahler sur $\mathbb{C}(z)$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$. Nous pouvons donc utiliser la théorie des catégories tannakiennes, en particulier, des critères de densité concernant les groupes et les groupoïdes dont nous donnons des précisions dans la Section 3.2 et la dualité tannakienne. Nous montrons que la catégorie des systèmes de Mahler singuliers réguliers (respectivement fuchsiens stricts) en 0, 1 et ∞, notée $\mathcal{E}_{sr}$ (respectivement $\mathcal{E}_{fs}$) est une sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{E}$. De plus, en Proposition 3.3.16, nous prouvons qu'un système de Mahler singulier régulier est rationnellement équivalent à un système fuchsien strict alors que, a priori, il est seulement méromorphiquement équivalent en 0, 1 et ∞ à des systèmes fuchsiens stricts en 0, 1 et ∞ respectivement. Ainsi, l'injection

$$\mathcal{E}_{fs} \to \mathcal{E}_{sr}$$

est une équivalence de catégories. Nous introduisons la catégorie globale $\mathcal{C}_{sr}$ des connexions dans la Section 3.5.2, les objets de cette catégorie généralisent les matrices de connexion introduites dans le cas régulier. Nous prouvons que $\mathcal{E}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont des catégories tannakiennes neutres sur $\mathbb{C}$ qui sont équivalentes.

Le théorème obtenu dans le cas singulier régulier est le suivant, Théorème 3.6.20 :

Théorème. *Les groupoïdes de Galois locaux* G_0, G_1, G_∞ *et les* $\Gamma_{0,\widetilde{z_0}}, \Gamma_{\infty,\widetilde{z_\infty}}$ *pour tout* $(\widetilde{z_0}, \widetilde{z_\infty}) \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0} \times \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$ *engendrent un sous-groupoïde qui est Zariski-dense dans le groupoïde de Galois de* $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$.

Dans ce théorème, les groupoïdes G_0, G_1, G_∞ sont les groupoïdes de Galois de catégories locales $\mathcal{E}_{sr}^{(i)}$ avec $i \in \{0, 1, \infty\}$. Ces catégories sont des localisations de la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ au point i dans le sens où nous considérons des morphismes définis localement en i (alors que pour $\mathcal{E}_{sr}$ les morphismes ont des coefficients dans $\mathbb{C}(z)$). Nous explicitons des sous-groupoïdes Zariski-dense dans les groupoïdes de Galois locaux G_0, G_∞ et G_1 dans les Sections 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3. Dans le cas régulier, ces trois groupoïdes sont triviaux.

Les éléments $\Gamma_{0,\widetilde{z_0}}$, $\Gamma_{\infty,\widetilde{z_\infty}}$ généralisent les matrices de connexion du cas régulier. Grosso modo, pour $i \in \{0, \infty\}$, $\Gamma_{i,\widetilde{z_i}}$ permet de connecter les groupoïdes locaux G_i et G_1. Plus précisément, si $\mathcal{X}$ est un objet de la catégorie des connexions $\mathcal{C}_{rs}$ et si nous notons $\left(\widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right)$ la paire de matrices de connexion contenue dans cet objet alors, pour $i \in \{0, \infty\}$, $\Gamma_{i,\widetilde{z_i}}$ associe $\widetilde{M_i}(\widetilde{z_i})$ à $\mathcal{X}$ pour tout $\widetilde{z_i}$ qui n'est pas dans l'ensemble $\widetilde{E_i}$ des singularités de $\widetilde{M_i}$. Afin d'avoir un contrôle sur les singularités, nous considérons la sous-catégorie tannakienne $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ de $\mathcal{C}_{sr}$ qui contient les paires de matrices de connexion dont les singularités sont dans les ensembles $\widetilde{E_0}$ et $\widetilde{E_\infty}$ respectivement.

0.3.4 Caractérisation effective des systèmes de Mahler singuliers réguliers

La seule hypothèse requise dans le théorème de densité de Schlesinger et ses analogues est d'avoir des singularités régulières. Les singularités de systèmes différentiels, aux q-différences ou τ-différences ont été très étudiées et des algorithmes pour savoir si ces singularités sont régulières ont été donnés, voir par exemple [Bir13, Mos59, Hil87, Bar95] pour les systèmes différentiels et [Pra83, Bar89, BP96] pour les systèmes aux q ou τ-différences. Dans [BBP08], un algorithme général pour reconnaître les singularités régulières est donné. Il s'applique à de nombreux systèmes dont les trois cités ci-dessus. Mais il ne s'applique pas aux singularités en 0 des systèmes de Mahler, à cause du fait que l'opérateur de Mahler $\phi_p : z \mapsto z^p$ ne préserve pas la valuation en 0.

De plus, si nous nous intéressons aux équations, plutôt qu'aux systèmes, des caractérisations effectives des singularités régulières des équations différentielles linéaires ou aux q-différences sont données par le polygône de Newton, qui est associé à chaque équation. Cependant pour les équations de Mahler, la valuation étant changée par l'opérateur $\phi_p : z \mapsto z^p$, un polygône de Newton n'est pas intrinsèquement lié à une équation de Mahler.

Ainsi, pour les systèmes de Mahler nous n'avons pas d'algorithmes pour reconnaître le caractère singulier régulier en 0. Nous avons seulement une condition suffisante de régularité qui est effective, elle est donnée en [Roq18, Proposition 34] : si un système de Mahler est fuchsien strict en 0 alors il est singulier régulier en 0. Mais, il existe des systèmes singuliers réguliers en 0 qui ne sont pas fuchsiens stricts, par exemple $y\left(z^p\right) = z^{1-p} y(z)$.

L'objectif du Chapitre 4 est de pallier ce manque c'est-à-dire de construire un algorithme qui permet de déterminer si un système de Mahler donné est singulier régulier en 0. Grâce aux travaux sur les systèmes aux q-différences, un critère effectif pour savoir si un système de Mahler est singulier régulier en 1 était déjà connu. De plus, nous pouvons remarquer que par le changement de variable $z \mapsto 1/z$, un critère en 0 nous donne aussi un critère pour savoir si un système de Mahler est singulier régulier en ∞. Nous aurons donc un critère effectif pour savoir si un système de Mahler vérifie l'hypothèse de l'analogue du théorème de densité de Schlesinger obtenu au Chapitre 3 i.e. savoir si il est singulier régulier en 0, 1 et ∞.

Avant de décrire cet algorithme (Algorithme 3) nous donnons dans la Section 4.1 des caractérisations des systèmes de Mahler singuliers réguliers en 0 analogues à celles des équations différentielles ou aux q-différences présentées dans la Section 1.3. Nous faisons aussi le lien entre la notion de système de Mahler singulier régulier en 0 des chapitres précédents et celle utilisée dans ce chapitre. Plus précisément, dans ce chapitre, la notion utilisée est plus générale : des ramifications $d \in \mathbb{N}^\star$ pour les transformations de jauge sont maintenant autorisées. Notre algorithme fournit aussi une caractérisation des systèmes de Mahler singuliers réguliers du Chapitre 3 en imposant $d = 1$ dans l'Algorithme 3.

La construction de l'Algorithme 3, qui permet de savoir si le système de Mahler est singulier régulier en 0, est un travail en commun avec Colin Faverjon. Il est présenté de la Section 4.2 à la fin du Chapitre 4. Nous l'avons détaillé dans [FP21] et il a donné lieu à un algorithme implémenté en Python 3. Donnons quelques précisions sur la construction de cet algorithme. Soit

$$\mathbf{K} := \bigcup_{d \in \mathbb{N}^\star} \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$$

le corps des séries de Puiseux. Supposons que le système de Mahler

$$\phi_p(Y) = AY, \quad A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$$

est $\mathbf{K}$-équivalent à un système ayant une matrice constante Λ grâce à une transformation de jauge $\Psi \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$ c'est-à-dire

$$\phi_p(\Psi)\Lambda = A\Psi.$$

Nous pouvons supposer que Λ est une matrice de Jordan. Ainsi, les colonnes $\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_m$ de Ψ sont des solutions d'équations de la forme

$$\lambda_i \phi_p(\boldsymbol{\psi}_i) + \epsilon_i \phi_p(\boldsymbol{\psi}_{i-1}) = A\boldsymbol{\psi}_i \tag{6}$$

où $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, λ_i est une valeur propre de Λ et $\boldsymbol{\psi}_0 := 0$. Pour prouver qu'un système de Mahler est singulier régulier en 0, nous étudions les solutions de ces équations. Plus précisément, nous donnons des bornes pour leurs valuations en 0 ainsi que des ramifications admissibles. De plus, nous explicitons des équations que doivent vérifier les premiers coefficients du développement de Puiseux de ces solutions. Cela permet de nous ramener en dimension finie pour le calcul des coefficients des solutions. Notre théorème principal est le suivant, Théorème 4.2.3 :

Théorème. *Soient $A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$ et $p \geq 2$. Il existe un algorithme qui détermine si le système de Mahler $\phi_p(Y) = AY$ est singulier régulier en 0. Cela est fait grâce au calcul de la dimension d'un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel explicite. De plus, si le système est singulier régulier en 0, l'algorithme retourne une matrice constante Λ (sous forme de Jordan) équivalente à A et une troncature à l'ordre voulu du développement en série de Puiseux d'une tranformation de jauge Ψ qui permet de se ramener au système constant $\phi_p(Y) = \Lambda Y$.*

Dans l'article [CDDM18], les auteurs ont construit un algorithme qui permet de savoir si une équation de Mahler a une base complète de solutions dans $\mathbf{K}$. Si c'est le cas, le système de Mahler est singulier régulier en 0 puisqu'il est en particulier $\mathbf{K}$-équivalent à la matrice identité. De ce point de vue, le théorème précédent est une généralisation de ce résultat de [CDDM18] puisque nous avons un critère pour savoir si un système de Mahler est $\mathbf{K}$-équivalent à une matrice constante inversible et cette dernière est donnée par l'algorithme.

Nous donnons une borne pour la complexité de cet algorithme et nous étudions quelques exemples. Entre autres, nous montrons que le système de Mahler associé à la série génératrice de Rudin-Shapiro n'est pas singulier régulier en 0.

0.3.5 Hypertranscendance

Dans le Chapitre 5, nous donnons un exemple d'application de la théorie de Galois aux équations de Mahler. Nous généralisons grâce à un résultat de théorie de Galois, [DHR18, Theorem 4.2], le théorème 1 de [BCZ15]. D'après ce théorème de Bell, Coons et Zudilin, si $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}((z))$ est une solution non nulle de l'équation de Mahler

$$z^4 f\left(z^{16}\right) - (1+z+z^2) f(z^4) + f(z) = 0 \tag{7}$$

alors les fonctions $f(z), f\left(z^4\right), f'(z), f'\left(z^4\right)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Nous obtenons la généralisation suivante au Théorème 5.2.1 :

Théorème. *Les fonctions $f(z), f(z^4)$ et toutes les dérivées successives sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Pour appliquer [DHR18, Theorem 4.2], le seul point délicat est le calcul du groupe de Galois aux différences de l'équation de Mahler ci-dessus. Dans cet exemple, ce calcul est facilité par le fait que nous connaissons une classification des sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$.

0.4 Organisation du manuscrit

Nous donnons ci-dessous une description globale du contenu des chapitres de ce manuscrit. Une description plus précise du contenu des chapitres se trouve au début de chaque chapitre.

Dans le Chapitre 1, nous présentons la théorie de Galois, le théorème de densité de Schlesinger et les systèmes singuliers réguliers. Ce chapitre a pour but d'introduire ces domaines et d'en mentionner des avancées.

Dans le Chapitre 2, nous utilisons la théorie de Picard-Vessiot afin d'obtenir un sous-groupe Zariski-dense dans le groupe de Galois d'une équation de Mahler régulière en 0, 1 et ∞.

Le Chapitre 3 généralise le théorème de densité du chapitre précédent. Plus précisément, grâce à la théorie des catégories tannakiennes, nous obtenons un analogue du théorème de densité de Schlesinger pour les équations de Mahler singulières régulières en 0, 1 et ∞.

Le Chapitre 4 présente un algorithme qui permet de savoir si un système de Mahler est singulier régulier en 0. Grâce à cet algorithme et à d'autres algorithmes connus, nous sommes en mesure de déterminer si une équation de Mahler donnée est singulière régulière en 0, 1 et ∞.

Le Chapitre 5 a pour objectif d'illustrer une des applications de la théorie de Galois. Nous obtenons l'hypertranscendance d'une fonction de Mahler et cela nous permet de généraliser [BCZ15, Theorem 1].

L'Annexe A a pour but de faire des rappels sur les catégories tannakiennes. Les définitions et résultats principaux de théorie des catégories tannakiennes utilisés au Chapitre 3 y sont rappelés.

0.5 Notations

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}^{\star} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$. Si $K = \mathbb{N}$ ou $K = \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $K_{\geq k} := \{x \in K \mid x \geq k\}$.

On note $\mathbb{C}\{z\}$ (respectivement $\mathbb{C}[[z]]$) l'anneau des séries à une indéterminée z, à coefficients complexes et convergentes au voisinage de 0 (respectivement formelles). On note $\mathbb{C}((z))$ le corps des fractions de $\mathbb{C}[[z]]$, qui est appelé le corps des séries de Laurent (formelles) et on note $\mathbb{C}(\{z\})$ le corps des fractions de $\mathbb{C}\{z\}$. De même, $\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ est l'anneau des séries formelles en $1/z$, à coefficients complexes et $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ est son corps des fractions. Les séries convergentes en $1/z$ sont notées $\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ et $\mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)$ est son corps des fractions. Aussi, $\mathbb{C}\{z-1\}$ est l'anneau des séries qui sont convergentes au voisinage de 1 et $\mathbb{C}\left(\{z-1\}\right)$ est son corps des fractions.

Soit $D(0,r)$ (respectivement $\overline{D}(0,r)$)) le disque ouvert (respectivement fermé) centré en 0 et de rayon r. Si $r = 1$ alors on note

$$D := D(0,1) \quad \text{et} \quad \overline{D} := \overline{D}(0,1).$$

Le cercle unité est noté $\mathscr{C}(0,1)$.

Si E est un ouvert d'une surface de Riemann, $\mathcal{M}(E)$ est le corps des fonctions méromorphes sur E. On considère le revêtement universel de $\mathbb{C}^{\star}$, noté $\widetilde{\mathbb{C}^{\star}}$, et le point $\widetilde{1} := (1,0)$ de cette surface de Riemann. On note

$$\Sigma_0 := \left\{\left(re^{ib}, b\right) \mid 0 < r < 1, b \in \mathbb{R}\right\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^{\star}},$$

$$\Sigma_\infty := \left\{\left(re^{ib}, b\right) \mid r > 1, b \in \mathbb{R}\right\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^{\star}}.$$

Dans ce manuscrit, nous fixons un entier $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On note ϕ_p l'opérateur de Mahler c'est-à-dire l'opérateur $\phi_p : z \mapsto z^p$. Soient f et $\widetilde{g}$ deux fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de $\widetilde{\mathbb{C}^{\star}}$ respectivement. Par abus de notation, nous noterons aussi ϕ_p la fonction $\phi_p : f(z) \mapsto f(z^p)$ et la fonction $\phi_p : \widetilde{g}(\widetilde{z}) \mapsto \widetilde{g}(\widetilde{z}^p)$.

La notation $\mathrm{Vect}^f(\mathbb{C})$ désigne les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. On note I_n la matrice identité de dimension $n \times n$. On note $||.||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est sous-multiplicative. Si M est une matrice, $\mathrm{rg}(M)$ est son rang c'est-à-dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes et $\mathrm{Ker}(M)$ est son noyau (à droite). Si f est une fonction, on note $\mathrm{Pôles}(f)$ (respectivement $\mathrm{Zéros}(f)$) l'ensemble des pôles (respectivement des zéros) de f. Si M est une matrice, $\mathrm{Pôles}(M)$ est l'union des pôles de ses coefficients.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ sont respectivement les objets et les morphismes de cette catégorie. Si $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ la classe des morphismes de A dans B de la catégorie $\mathcal{C}$. Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, on écrit $u : A \to B$. Si G est un groupoïde et $\alpha, \beta \in \mathrm{Obj}(G)$ alors $G(\alpha,\beta)$ désigne les morphismes de G qui vont de α dans β.

Chapitre 1

Présentation du domaine d'étude

Dans ce chapitre, nous faisons une présentation de la théorie de Galois dans la Section 1.1. Nous exposons les idées qui ont conduit à la théorie de Galois classique et comment elles ont été transposées pour obtenir une théorie de Galois différentielle, aux différences ainsi que d'autres théories de Galois récentes. Nous rappelons les définitions et les principaux résultats dont nous avons besoin pour les prochains chapitres. L'objectif des Chapitres 2 et 3 étant d'obtenir un analogue pour les équations de Mahler du théorème de densité de Schlesinger, nous donnons des détails dans la Section 1.2 sur ce théorème et les analogues qui étaient déjà connus. La seule hypothèse du théorème de Schlesinger et ses analogues est que l'équation fonctionnelle considérée doit avoir des singularités régulières. Les principales propriétés des systèmes singuliers réguliers sont rappelées dans la Section 1.3.

1.1 Théories de Galois

1.1.1 Les débuts de la théorie de Galois classique

Soit x une inconnue. Une équation polynomiale de degré $n \geqslant 1$ est une équation de la forme

$$P(x) = 0 \quad \text{où} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Q}[x] \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0. \tag{1.1}$$

La résolution de ces équations jusqu'au degré 4 est connue depuis le XVI$^{\text{e}}$ siècle. Le mathématicien Al-Khwarizmi est le premier à avoir rassemblé et exposé un ensemble de méthodes de résolutions des équations du premier et du second degré dans son livre intitulé *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* au début du IX$^{\text{e}}$ siècle. En 1545, Girolamo Cardano publie le livre *Artis magnae sive de regulis algebraicisn*, aussi appelé *Ars Magna*, qui contient des résultats connus sur la résolution des équations polynomiales ainsi que de nouvelles connaissances provenant notamment de l'auteur, del Ferro, Tartaglia et Ferrari. Grâce à ces travaux, nous savons que si $n = 2$ et $\Delta := a_1^2 - 4a_0a_2$, l'équation (1.1) a deux solutions si $\Delta \neq 0$ et une solution qui est racine double de P si $\Delta = 0$. Elles sont données par les formules suivantes :

- si $\Delta > 0$, les deux solutions sont $\frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2}$;

- si $\Delta = 0$, la solution est $\frac{-a_1}{2a_2}$;
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont $\frac{-a_1 \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}$.

Pour le cas $n = 3$, l'équation (1.1) a au plus 3 solutions dont les formules ont été obtenues en utilisant les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt[3]{\cdot}$ sur les valeurs $1, a_0, \ldots, a_n$. Le même type de formule a été obtenu lorsque $n = 4$. Les méthodes utilisées pour obtenir ces formules (changements de variables, substitutions) n'avaient pas permis de résoudre des équations de degré supérieur ou égal à 5.

Question : Si $n \geq 5$, est-ce que l'on peut trouver une formule générale pour les solutions de (1.1) en utilisant seulement les opérations $+, -, \times, \div, \sqrt{\cdot}, \sqrt[2]{\cdot}, \ldots, \sqrt[n]{\cdot}$ sur les coefficients de P et la valeur 1 (i.e. est-ce que (1.1) est *résoluble par radicaux*) ?

Deux siècles ont été nécessaires pour aller au-delà du degré 4 et répondre non à cette question. Ruffini est le premier à mettre en avant l'impossibilité de trouver des solutions par radicaux des équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5, dans [Ruf99] en 1799. Pour cela, il utilise la notion de permutation et son application à la résolution d'équations polynomiales mise en avant vers 1770 dans des travaux de Lagrange, Vandermonde, Waring notamment (voir [Lag70, War70, Van71]). Les arguments développés par Ruffini forment les débuts de la théorie des groupes. Mais, la démonstration de Ruffini reste incomplète et c'est Abel qui publiera une preuve 25 ans plus tard de ce résultat qui est connu sous le nom de Théorème d'Abel-Ruffini :

Théorème (d'Abel-Ruffini)**.** *Il est impossible de résoudre par radicaux les équations générales des degrés supérieurs ou égal au cinquième.*

Ce théorème ne donne pas de conditions nécessaires et suffisantes de résolubilité. Cet apport sera fait par Galois et sera à l'origine de la théorie de Galois. L'idée de Galois est de regarder les permutations des solutions de l'équation (1.1), notées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, qui préservent les relations algébriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire les permutations σ des racines de P telles que

$$\forall Q \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_n], Q(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0 \Rightarrow Q(\sigma(\alpha_1), ..., \sigma(\alpha_n)) = 0.$$

L'ensemble de ces permutations est noté G'_{gal}.

Théorème (Galois)**.** *L'équation $P(x) = 0$, avec $P \in \mathbb{Q}[x]$, est résoluble par radicaux si et seulement si G'_{gal} est résoluble.*

La formulation du théorème de Galois est en fait plus générale car elle s'applique à tout polynôme P à coefficients dans un corps K de caractéristique nulle (et pas seulement $K = \mathbb{Q}$). Les premiers écrits de Galois, présentés à l'Académie des sciences en 1829, sont tombés dans l'oubli. C'est Liouville qui fait découvrir un mémoire que Galois a écrit en 1831, intitulé *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, et qui a ensuite été publié en 1846. Suite à ces découvertes, ce n'est donc plus le degré d'une équation qui est important pour sa résolution mais ce sont les propriétés du groupe G'_{gal} attaché à l'équation. Il faut noter que les notions de groupes et de corps étaient implicites jusque dans la deuxième moitié du XIX[e] siècle et cela a été clarifié grâce notamment à des travaux de Cauchy, Cayley et Jordan. La définition moderne du groupe de Galois a été donnée par Emil Artin : le groupe de Galois n'est plus un groupe de permutations mais un groupe d'automorphismes. Plus précisément, si $L := \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n) \subset \mathbb{C}$ est le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$, la définition d'Artin du groupe de Galois est

$$G_{gal} := \mathrm{Aut}\,(L/\mathbb{Q})\,,$$

c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes $f : L \to L$ qui sont l'identité sur $\mathbb{Q}$ i.e. tels que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Cette définition est justifiée par le fait que les groupes G_{gal} et G'_{gal} sont isomorphes via le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & G_{gal} & \to & G'_{gal} \\ & f & \mapsto & f_{|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}}. \end{array}$$

1.1.2 Vers la théorie de Galois différentielle

Nous avons rappelé ci-dessus que la théorie de Galois classique s'intéresse aux racines d'un polynôme P de degré $n \geq 1$ et que le groupe de Galois, qui est un sous-groupe du groupe des permutations des racines de P, permet de savoir grâce au théorème de Galois si l'équation est résoluble par radicaux. La théorie de Galois différentielle s'intéresse quant à elle aux solutions des équations différentielles linéaires d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ de la forme

$$y^{(n)}(z) + a_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + \ldots + a_0(z)y(z) = 0 \quad \text{où} \quad a_i \in \mathbb{C}(z). \tag{1.2}$$

Question : Est-ce que les solutions de (1.2) peuvent être exprimées avec des fonctions élémentaires (constantes, identité, $\sqrt[n]{\cdot}$, exp, ln, fonctions trigonométriques) et les opérations suivantes sur ces fonctions : arithmétiques, composition, intégration (i.e. (1.2) est *résoluble par quadratures*) ?

La réponse à cette question a été donnée par les travaux de Picard et Vessiot à la fin du XIX[e] siècle. D'ailleurs, la théorie de Galois différentielle est aussi connue sous le nom de théorie de Picard-Vessiot. L'analogue du théorème de Galois dans le cas différentiel donne une caractérisation de la résolubilité par quadratures. Dans les articles de Picard et de Vessiot, les notions utilisées, telles que la résolubilité par quadratures, ne sont pas bien définies et c'est Kolchin en 1948 dans [Kol48] qui donne une version rigoureuse du théorème de Picard-Vessiot. Plus précisément, l'équation différentielle (1.2) est dite résoluble par quadratures si l'extension de Picard-Vessiot K est une extension de Liouville de $K_0 := \mathbb{C}(z)$ c'est-à-dire qu'il existe une tour d'extensions de corps

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n := K$$

telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $K_i = K_{i-1}(t_i)$ où t_i vérifie l'une des conditions suivantes :

- $t'_i \in K_{i-1}$ i.e. t_i est l'intégrale d'un élément de K_{i-1} ;
- $t_i \neq 0$, $t'_i/t_i \in K_{i-1}$ i.e. t_i est l'exponentielle de l'intégrale d'un élément de K_{i-1} ;
- t_i est algébrique sur K_{i-1}.

Théorème (Picard-Vessiot)**.** *L'équation* (1.2) *est résoluble par quadratures si et seulement si la composante connexe de l'identité de son groupe de Galois différentiel est résoluble.*

Dans la suite de cette section, nous rappelons la définition du groupe de Galois différentiel et ses propriétés. Nous considérons le système différentiel suivant :

$$Y'(z) = A(z)Y(z), \quad A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z)) \tag{1.3}$$

D'après le théorème de Cauchy, si $z_0 \in \mathbb{C}$ n'est pas un pôle de $A(z)$ alors il existe une matrice inversible $\mathcal{Y}(z)$ ayant pour coefficients des séries convergentes au voisinage de z_0 et telle que $\mathcal{Y}'(z) = A(z)\mathcal{Y}(z)$. La matrice $\mathcal{Y}$ est une *matrice fondamentale de solutions* du système (1.3).

Proposition-Définition 1.1.1. Soit $K = \mathbb{C}(z)(\mathcal{Y}(z))$ l'extension du corps $\mathbb{C}(z)$ engendrée par les coefficients de la matrice $\mathcal{Y}$. Il existe une extension au corps K de la dérivation $\frac{d}{dz}$ sur $\mathbb{C}(z)$, on la note aussi $\frac{d}{dz}$.

- Le corps K muni de la dérivation $\frac{d}{dz}$ est appelé *corps de Picard-Vessiot* pour (1.3) sur $\mathbb{C}(z)$.
- Le *groupe de Galois différentiel du système différentiel* (1.3) sur $\mathbb{C}(z)$ est

$$\mathrm{Gal}^{\frac{d}{dz}}(K/\mathbb{C}(z)) := \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{C}(z)) \middle| \sigma \circ \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz} \circ \sigma \right\}.$$

- Le *groupe de Galois différentiel de l'équation* (1.2) sur $\mathbb{C}(z)$ est le groupe de Galois différentiel du système différentiel associé à cette équation (i.e. le système (1.3) où A est la matrice compagnon de l'équation (1.2)).

On a donc les analogies suivantes entre la théorie de Galois classique et la différentielle.

Classique	Différentielle
$P(X) = 0$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $n \geq 1$	$Y'(z) = A(z)Y(z)$, $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$
racines de P : $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$	matrice fondamentale de solutions : $\mathcal{Y}$
corps de décomposition $L := \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$	corps de Picard-Vessiot $K := \mathbb{C}(z)(\mathcal{Y}(z))$
groupe de Galois $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$	groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal}^{\frac{d}{dz}}(K/\mathbb{C}(z))$

Dans le cas classique, un élément du groupe de Galois classique laisse globalement stable les racines du polynôme P. Dans le cas différentiel, si σ est un élément du groupe de Galois différentiel et $\mathcal{Y}$ est une matrice fondamentale de solutions de (1.3), la condition $\sigma \circ \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz} \circ \sigma$ permet d'assurer que $\sigma(\mathcal{Y})$ est aussi une matrice fondamentale de solutions. En effet,

$$(\sigma \mathcal{Y})' = \sigma(\mathcal{Y}') = \sigma(A\mathcal{Y}) = A\sigma(\mathcal{Y}).$$

Contrairement au cas classique, le groupe de Galois différentiel est en général infini mais il a des propriétés intéressantes que nous allons voir ci-dessous (voir [vdPS03, Chapter 1] pour plus de détails).

Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}^{\frac{d}{dz}}(K/\mathbb{C}(z))$, il existe une unique matrice $C(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}C(\sigma)$. La représentation du groupe $\mathrm{Gal}^{\frac{d}{dz}}(K/\mathbb{C}(z))$

$$\rho_{\mathrm{gal}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}^{\frac{d}{dz}}(K/\mathbb{C}(z)) & \rightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma & \mapsto & C(\sigma) \end{array}$$

est fidèle. On note G_{gal} son image. Si on choisit une autre matrice fondamentale de solutions, on obtient une représentation conjuguée.

Théorème. *Le groupe G_{gal} est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Cette théorie s'étend aux équations différentielles linéaires à coefficients dans un corps différentiel (i.e. un corps muni d'une dérivation) dont le corps des constantes est algébriquement clos et de caractéristique nulle. La correspondance de Galois, qui est un des théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois classique et qui établit une bijection entre les sous-corps d'une extension finie et galoisienne et les sous-groupes du groupe de Galois de cette extension, a un analogue en théorie de Galois différentielle. Ce théorème est rappelé dans [vdPS03, Proposition 1.34].

Théorème (Correspondance de Galois)**.** *Soient $\left(L, \dfrac{d}{dz}\right)$ le corps de Picard-Vessiot pour (1.3) sur $\mathbb{C}(z)$ et G son groupe de Galois différentiel. L'ensemble des extensions de corps de $\mathbb{C}(z)$ contenues dans L et stables par la dérivation (c'est-à-dire les sous-corps différentiels de L contenant $\mathbb{C}(z)$) est noté $\mathcal{L}$ et l'ensemble des sous-groupes fermés de G est noté $\mathcal{S}$. Pour tout $M \in \mathcal{L}$ et tout $H \in \mathcal{S}$, on note*

$$G(L/M) := \{\sigma \in G \mid \sigma_{|M} = id\},$$
$$L^H := \{f \in L \mid \forall \sigma \in H, \sigma(f) = f\}.$$

Alors, l'application $H \mapsto L^H$ est une bijection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{L}$ dont la bijection réciproque est donnée par $M \mapsto G(L/M)$.

Un des intérêts de l'étude du groupe de Galois différentiel G de (1.2) est qu'il mesure les relations algébriques entre les solutions $y_1, \ldots, y_n$ de (1.2) et leurs dérivées successives. L'idée est que plus G est « gros », moins il y a de relations algébriques. Par exemple :

- $G = GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si
$$y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}$$
sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$. Dans ce cas, $\dim(G) = n^2$.
- G est fini si et seulement si toutes les solutions $y_1, \ldots, y_n$ sont algébriques sur $\mathbb{C}(z)$. Dans ce cas, $\dim(G) = 0$.

Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème. *Le degré de transcendance du corps de Picard-Vessiot K sur $\mathbb{C}(z)$ de (1.2) est égal à la dimension du groupe de Galois différentiel de (1.2) :*

$$\dim(G) = \deg\operatorname{tr}(K/\mathbb{C}(z)).$$

1.1.3 Théorie de Galois aux différences

Une théorie analogue à celle de la théorie de Galois différentielle mais pour des systèmes aux différences a été développée : notions de groupes de Galois aux différences, correspondance de Galois, la mesure des relations algébriques etc. Elle est appelée théorie de Galois aux différences et nous en faisons des rappels ci-dessous. Nous faisons référence à [vdPS97, Chapter 1] pour plus de détails.

Corps aux différences

Un *anneau aux différences* est un couple (R, ϕ) où R est un anneau et $\phi : R \to R$ un automorphisme d'anneaux. Si R est un corps alors (R, ϕ) est un *corps aux différences.*

Exemple 1.1.2.

- Cas mahlérien. Soient $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$K = K_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 0} K_{p^n} \quad \text{où} \quad K_{p^n} = \mathbb{C}\left(z^{1/p^n}\right)$$

et

$$\begin{array}{cccc} \phi_p : & K & \to & K \\ & f(z) & \mapsto & f\left(z^p\right). \end{array}$$

Le couple (K, ϕ_p) est un corps aux différences dont le corps des constantes est $\mathbb{C}$. Nous avons le même résultat si $K = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{C}\left(\left(z^{1/p^n}\right)\right)$ ou $K = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{C}\left(z^{1/n}\right)$ ou K est le corps des fonctions méromorphes en 1 par exemple. Par contre, si $K = \mathbb{C}(z)$ ou K est le corps des fonctions méromorphes en 0 alors (K, ϕ_p) n'est pas un corps aux différences puisque $\phi_p : K \to K$ n'est pas surjectif.

- Cas des q-différences. Soit K le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(z)$. Le couple (K, σ_q) où $q \in \mathbb{C}$ a un module différent de 1 et

$$\begin{array}{cccc} \sigma_q : & K & \to & K \\ & f(z) & \mapsto & f(qz) \end{array} \tag{1.4}$$

est un corps aux différences dont le corps des constantes est $\mathbb{C}$. Nous avons le même résultat si K est le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ par exemple.

- Cas des τ-différences. Soient $\tau \in \mathbb{C}^\star$ et $K = \mathbb{C}(z)$. Le corps K muni de l'automorphisme $f(z) \in K \mapsto f(z + \tau)$ est un corps aux différences dont le corps des constantes est $\mathbb{C}$.

Deux anneaux aux différences (R_1, ϕ_1) et (R_2, ϕ_2) sont *isomorphes* si il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : R_1 \to R_2$ tel que $\varphi\phi_1 = \phi_2\varphi$.

Un anneau aux différences (R_2, ϕ_2) est une *extension d'anneau aux différences* d'un anneau aux différences (R_1, ϕ_1) si R_2 est une extension d'anneau de R_1 et $\phi_{2|R_1} = \phi_1$.

Deux extensions d'anneau aux différences (R_1, ϕ_1) et (R_2, ϕ_2) de (R, ϕ) sont *isomorphes sur* (R, ϕ) si il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : R_1 \to R_2$ tel que $\varphi_{|R} = \mathrm{id}_R$ et $\varphi\phi_1 = \phi_2\varphi$.

Un anneau aux différences (R_1, ϕ_1) est un *sous-anneau aux différences* d'un anneau aux différences (R_2, ϕ_2) si (R_2, ϕ_2) est une extension d'anneau aux différences de (R_1, ϕ_1).

Anneau (total) de Picard-Vessiot

Soit (R, ϕ) un anneau aux différences. Par abus de notation, on le notera souvent R. Un idéal de R qui est stable par ϕ est un *idéal aux différences* de (R, ϕ). L'*anneau des constantes* R^ϕ de l'anneau aux différences (R, ϕ) est défini par

$$R^\phi := \{f \in R \mid \phi(f) = f\}.$$

Si R est un corps, R^ϕ est un corps appelé *corps des constantes*.

Soit (k, ϕ) *un corps aux différences. On suppose que son corps des constantes*

$$C := k^\phi$$

est algébriquement clos et que la caractéristique de k *est* 0.

On considère le système aux différences

$$\phi\left(Y\right) = AY \quad \text{avec} \quad A \in \mathrm{GL}_n\left(k\right). \tag{1.5}$$

D'après [vdPS97, Section 1.1], il existe une extension d'anneau aux différences R de (k, ϕ) telle que

1. il existe $U \in \mathrm{GL}_n\left(R\right)$ telle que $\phi\left(U\right) = AU$ (une telle matrice U est une *matrice fondamentale de solutions de* (1.5)) ;
2. R est engendré, en tant que k-algèbre, par les coefficients de U et $\det\left(U\right)^{-1}$;
3. les seuls idéaux aux différences de R sont $\{0\}$ et R.

Un tel anneau aux différences R est appelé un *anneau de Picard-Vessiot de* (1.5) *sur* (k, ϕ). Il est unique à isomorphisme (d'anneaux aux différences sur (k, ϕ)) près.

Un anneau de Picard-Vessiot n'est pas sans diviseur de zéro en général. D'après [vdPS97, Corollary 1.16], on peut décomposer R en un produit direct d'anneaux

$$R = \oplus_{x \in X} R_x \quad \text{avec} \quad R_x = Re_x$$

où

- $X = \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ pour un entier $t \geq 1$;
- pour tout $x \in X$, e_x est un idempotent de R ;
- pour tout $x \in X$, R_x est un anneau sans diviseur de zéro ;
- pour tout $x \in X$, $\phi\left(e_x\right) = e_{x+1_X}$, ainsi $\phi\left(R_x\right) = R_{x+1_X}$.

Notons K l'anneau total des fractions de R :

$$K := \oplus_{x \in X} K_x$$

où K_x est le corps des fractions de R_x. On peut vérifier que ϕ peut être étendu de manière unique en un automorphisme d'anneaux de K. Ainsi, K est une extension d'anneau aux différences de R, il est appelé *anneau total de Picard-Vessiot* de (1.5) sur (k, ϕ). On a $K^\phi = C$.

Si l'anneau de Picard-Vessiot R est sans diviseur de zéro, le corps K sera appelé *corps de Picard-Vessiot*.

Groupe de Galois aux différences

On note

$$\mathrm{Aut}\,(K/k) = \left\{\sigma : K \to K \mid \sigma \text{ est un automorphisme et } \sigma_{|k} = \mathrm{id}\right\}.$$

Le *groupe de Galois aux différences* G sur (k, ϕ) de (1.5) est

$$G := \{\sigma \in \mathrm{Aut}\,(K/k) \mid \phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi\}.$$

Pour tout $\sigma \in G$, il existe un unique $C(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(C)$ tel que $\sigma(U) = UC(\sigma)$ (un calcul immédiat donne que $U^{-1}\sigma(U)$ a des coefficients dans C). D'après [vdPS97, Theorem 1.13], la représentation fidèle

$$\sigma \in G \mapsto C(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(C)$$

permet d'identifier G avec un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}_n(C)$. Si on choisit une autre matrice fondamentale de solutions, on obtient une représentation conjuguée.

À l'équation aux différences

$$a_n\phi^n(y) + a_{n-1}\phi^{n-1}(y) + \ldots + a_0 y = 0 \tag{1.6}$$

où $a_0, \ldots, a_n \in k$ et $a_0 a_n \neq 0$, on peut associer le système aux différences

$$\phi(Y) = AY \quad \text{avec} \quad A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(k). \tag{1.7}$$

Par définition, le *groupe de Galois aux différences de l'équation* (1.6) est le groupe de Galois aux différences du système (1.7).

Correspondance de Galois

D'après [vdPS97, Theorem 1.29], il y a la correspondance de Galois suivante.

Théorème 1.1.3. *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-anneaux aux différences F de K tels que $k \subset F$ et tels que tout élément qui n'est pas un diviseur de zéro de F est inversible dans F. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes algébriques de G. Alors,*

- *pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'ensemble $G(K/F)$ des éléments σ de G tels que $\sigma_{|F} = id$ est un sous-groupe algébrique de G ;*
- *pour tout sous-groupe algébrique H de G,*

  $$K^H := \{x \in K \mid \forall \sigma \in H, \sigma(x) = x\}$$

  appartient à $\mathcal{F}$;
- *les applications $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $F \mapsto G(K/F)$ et $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, $H \mapsto K^H$ sont inverses l'une de l'autre.*

1.1.4 Autres théories de Galois

Ces dernières années, il y a eu l'émergence de nouvelles théories de Galois. Dans [CS07], Cassidy et Singer ont posé les bases d'une théorie de Galois pour les systèmes différentiels linéaires dépendant de paramètres c'est-à-dire les systèmes de la forme

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, t_1, \dots, t_n)Y \tag{1.8}$$

où $A(x, t_1, \dots, t_n)$ est une matrice carrée dont les coefficients sont des fonctions de la variable x et des paramètres $t_1, \dots, t_n$. Les groupes de Galois ne sont pas des groupes algébriques comme dans la théorie de Galois différentielle mais des groupes différentiels c'est-à-dire des groupes de matrices dont les coefficients sont des fonctions des paramètres $t_1, \dots t_n$ qui sont solutions d'un ensemble d'équations différentielles. Le groupe de Galois de cette théorie, dit groupe de Galois différentiel paramétré, est un groupe de transformations qui préserve les relations algébriques d'un ensemble de solutions d'un système de la forme (1.8) et de leurs dérivées successives pour toutes les variables. Dans ce cas, le groupe de Galois mesure les relations algébriques mais aussi différentielles, par rapport aux paramètres $t_1, \dots t_n$, entre ces solutions. Nous pouvons noter que le groupe de Galois différentiel paramétré est inclus dans le groupe de Galois différentiel et il est même Zariski-dense dans ce dernier ([HS08, Proposition 6.21]).

Depuis, les théories de Galois différentielles ([vdPS03]), aux différences ([vdPS97]) et différentielles paramétrées ([CS07]) ont été englobées dans une théorie exposée dans [HS08]. Ces théories sont très puissantes et donnent lieu à des théorèmes qui permettent de nombreuses applications qui concernent notamment des résultats d'indépendance algébrique ou d'hypertranscendance de solutions d'équations aux différences/différentielles. Par exemple, grâce à la théorie de Galois de [HS08], il est montré dans [ADH21] que les solutions f d'équations de Mahler, aux q-différences ou aux τ-différences qui peuvent être exprimées comme des séries de Laurent (avec éventuellement des ramifications) sont hypertranscendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relations algébriques entre f et ses dérivées, sauf dans le cas où la solution appartient au corps de base.

Des théories de Galois qui s'intéressent par exemple aux relations algébriques aux différences qui existent entre les solutions des équations différentielles linéaires sont aussi développées. Les personnes intéressées par ces théories pourront par exemple consulter [AOT14, DVHW14, OW15] et trouveront dans l'introduction de [DVHW14] un résumé des liens qui existent entre ces différentes théories, leurs applications et leurs limites.

1.2 Théorème de densité de Schlesinger

L'intérêt du groupe de Galois différentiel est qu'il donne des informations sur les relations algébriques entre les solutions d'une équation différentielle linéaire. Nous cherchons donc à mieux connaître les groupes de Galois différentiels. La monodromie, qui est une notion venant de l'analyse, va s'avérer très utile pour construire des éléments de ce groupe. En particulier, le théorème de densité de Schlesinger assure que sous certaines hypothèses, le groupe de monodromie est Zariski-dense dans le groupe de Galois. Donnons quelques précisions sur ce théorème. On considère le système différentiel

$$Y'(z) = A(z)Y(z), \quad A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z)) \tag{1.9}$$

Définition 1.2.1. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un *point singulier* de (1.9) si c'est un pôle de $A(z)$.

On pose $t = 1/z$ et $\widetilde{Y}(t) := Y(z)$. Le point ∞ *est un point singulier* de (1.9) si $t = 0$ est un point singulier de

$$\widetilde{Y}'(t) = -\frac{1}{t^2}A\left(\frac{1}{t}\right)\widetilde{Y}(t).$$

On note S les points singuliers de (1.9). Soient $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = z_0 = \gamma(1)$ et $\mathcal{Y}$ une matrice fondamentale de solutions de (1.9). Les coefficients de $\mathcal{Y}$ peuvent être prolongés analytiquement le long de γ et nous notons $\gamma\mathcal{Y}$ la matrice obtenue suite à ces prolongements analytiques. La matrice $\gamma\mathcal{Y}$ est aussi une matrice fondamentale de solutions de (1.9) donc

$$\mathcal{Y}(z)^{-1}\gamma\mathcal{Y}(z) := M(\gamma)$$

est à coefficients constants i.e. $M(\gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et elle ne dépend pas de la classe d'homotopie $[\gamma]$ du chemin γ. La représentation de $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S, z_0)$

$$\begin{array}{cccc} \rho_{\text{mono}} : & \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S, z_0) & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & [\gamma] & \mapsto & M([\gamma]) := M(\gamma) \end{array}$$

est appelée *représentation de monodromie* et le *groupe de monodromie*, noté G_{mono}, est l'image de cette représentation. Si G_{Gal} est le groupe de Galois différentiel de (1.9) sur $\mathbb{C}(z)$ alors

$$G_{\text{mono}} \subset G_{Gal}.$$

Cette inclusion peut être stricte. Mais, nous pouvons en dire plus : nous allons voir que, sous une certaine hypothèse, G_{mono} est Zariski-dense dans G_{Gal}.

Définition 1.2.2. Le système (1.9) est dit *singulier régulier en* 0 si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\alpha - \beta| < 2\pi$, il existe $\epsilon > 0$ et une matrice fondamentale de solutions $\mathcal{Y}$ tels que sur le secteur

$$S_{\alpha,\beta,\epsilon} := \{z \in \mathbb{C}^\star \mid \arg(z) \in]\alpha, \beta[, |z| < \epsilon\}$$

la croissance des coefficients de $\mathcal{Y}$ est modérée, c'est-à-dire que sur ce secteur, pour tout coefficient g de $\mathcal{Y}$, il existe $N \in \mathbb{Z}$ et un réel $c > 0$ tel que $|g(z)| < c|z|^N$.

De même, nous avons la notion de système singulier régulier en $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le système (1.9) est dit singulier régulier si il est singulier régulier en s pour tout $s \in S$, l'ensemble des singularités de (1.9).

Théorème (Schlesinger)**.** *Si le système* (1.9) *est singulier régulier alors le groupe de monodromie est Zariski-dense dans le groupe de Galois différentiel i.e.*

$$\overline{G_{\text{mono}}}^{\text{Zar}} = G_{\text{Gal}}$$

Nous pouvons noter que la preuve de ce théorème utilise la correspondance de Galois (voir [vdPS03, Theorem 5.8] pour plus de précisions).

Des généralisations de ce théorème ont été données pour les équations aux q-différences par Etingof puis développées par Duval, Ramis, Sauloy, Singer, van der Put (voir [vdPS97, Sau03] pour plus de précisions). Ce théorème de densité a aussi été étendu au cas des équations différentielles qui ne sont pas singulières régulières, elles sont dites irrégulières. Dans ce cas, la monodromie seule ne suffit plus pour construire un groupe Zariski-dense dans le groupe de Galois différentiel : il faut ajouter à la monodromie des automorphismes de Stokes et des tores exponentiels pour avoir un tel sous-groupe, c'est le théorème de densité de Ramis, voir [vdPS03, Theorem 8.10]. Dans [Dre14a], Dreyfus montre l'analogue du théorème de Ramis dans le cas paramétré.

Les applications de ces théorèmes de densité sont essentiellement théoriques. Une de ces applications est le problème de Galois inverse, qui consiste à caractériser les groupes algébriques qui apparaissent comme groupes de Galois différentiels ou aux différences. Pour plus de précisions, voir par exemple [Kov71, TT79, MS96] pour la théorie de Galois différentielle (des rappels historiques sur l'avancée du problème inverse dans le cadre différentiel sont donnés dans l'introduction de [MS96]) et [Eti95, vdPS97] pour celle aux q et τ-différences. Dans le cadre de la théorie de Galois différentielle paramétrée, une réponse au problème inverse de Galois est donnée dans [Dre14a]. Le théorème de densité permet aussi de mieux cerner la structure du groupe de Galois tannakien de la catégorie des équations différentielles et aux q et τ-différences.

Le calcul des groupes de Galois est une des difficultés majeures en théorie de Galois. Des algorithmes ont été développés pour en calculer, voir par exemple [Kov86, Hen98, AHMRW11, Dre14b, BCWDV16, Arr17, HMO17, Fen18, Roq18, DW19]. Certains calculs de groupes de Galois utilisent des analogues des théorèmes de densité de Schlesinger ou de Ramis, voir notamment [BH89, DM89, Mit96, vdH07, Roq08], ce qui donne un exemple d'application non théorique de ces théorèmes de densité.

1.3 Systèmes singuliers réguliers

Dans cette section, nous faisons des rappels sur les caractéristiques des systèmes singuliers réguliers.

La seule hypothèse du théorème de densité de Schlesinger est que le système considéré est singulier régulier. Il a été étendu au cas des systèmes irréguliers mais cela a un coût : les matrices de monodromie ne suffisent plus à engendrer un sous-groupe Zariski-dense dans le groupe de Galois (voir Section 1.2). L'étude des systèmes singuliers réguliers a un autre intérêt : leurs solutions ont de bonnes propriétés analytiques, contrairement au cas irrégulier. Nous rappelons que le système différentiel (1.9) est singulier régulier en 0 si la croissance des coefficients d'une matrice fondamentale de solutions de (1.9) est modérée en 0 (voir Définition 1.2.2).

Définition 1.3.1. Soient $k := \mathbb{C}(\{z\})$ le corps des séries de Laurent convergentes au voisinage de 0, $\delta := z\dfrac{d}{dz}$ et $A, B \in \mathrm{GL}_n(k)$. Les systèmes différentiels

$$\delta Y = AY \quad \text{et} \quad \delta Y = BY$$

sont dit *k-équivalents* si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ tel que

$$B = \delta(P).P^{-1} + PAP^{-1}.$$

Cette définition de l'équivalence est naturelle puisque si ces deux systèmes sont équivalents et que $\mathcal{Y}$ est solution de $\delta Y = AY$ alors $P\mathcal{Y}$ est solution de $\delta Y = BY$.

Proposition 1.3.2. *On considère le système*

$$\delta Y = AY, \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\})). \tag{1.10}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Le système* (1.10) *est singulier régulier en* 0.
2. *Le système* (1.10) *est $\mathbb{C}(\{z\})$-équivalent à un système de la forme $\delta Y = BY$ où B est une matrice dont les coefficients sont des fonctions holomorphes en* 0.
3. *Le système* (1.10) *est $\mathbb{C}(\{z\})$-équivalent à un système de la forme $\delta Y = CY$ où $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Nous disons que l'équation différentielle linéaire

$$\delta^n(y) + a_{n-1}\delta^{n-1}(y) + \cdots + a_0 y = 0 \tag{1.11}$$

où $a_i \in \mathbb{C}(\{z\})$, $0 \le i \le n-1$, est singulière régulière en 0 si le système différentiel associé (i.e. celui avec la matrice compagnon de (1.11)) l'est.

De ce résultat découle le critère de Fuchs :

Proposition 1.3.3. *L'équation* (1.11) *est singulière régulière en* 0 *si et seulement si les a_i sont holomorphes en* 0.

Remarque 1.3.4. Nous avons des propriétés analogues à celles données ci-dessus pour les systèmes différentiels singuliers réguliers en $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (voir [vdPS03, Section 5.1] pour plus de précisions).

Pour les systèmes aux q-différences, ce sont les points 0 et ∞, points fixes de l'opérateur $\sigma_q : z \mapsto qz$, qui vont jouer le rôle des singularités d'un système différentiel dans l'analogue du théorème de densité de Schlesinger. Nous avons dans ce cadre des résultats qui font écho à ceux des équations différentielles linéaires. Nous les rappelons pour le point 0, ceux en ∞ s'en déduisant par le changement de variable $z \mapsto 1/z$.

Définition 1.3.5. Soient $k := (\mathbb{C}(\{z\})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(k)$. Le système aux q-différences

$$\sigma_q Y = AY. \tag{1.12}$$

est *singulier régulier en* 0 si il est k-équivalent à un système de la forme $\sigma_q Y = CY$ où $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ tel que

$$C = \sigma_q(P)^{-1}AP.$$

Remarque 1.3.6. Nous avons une définition analogue pour les systèmes de Mahler : il suffit de remplacer l'opérateur σ_q par l'opérateur de Mahler ϕ_p.

D'après [HSS16, Theorem 3.1.7, p127], le système (1.12) est singulier régulier en 0 si et seulement si il admet une matrice fondamentale de solutions $\mathcal{Y}$ telle que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}^{-1}$ ont une croissance modérée le long des q-spirales. Cela signifie que pour toute demi-spirale $cq^{-\mathbb{N}}$ le long de laquelle les coefficients f de $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}^{-1}$ sont définis, ils vérifient $f(z) = \mathcal{O}\left(|z|^m\right)$ le long de $cq^{-\mathbb{N}}$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. De plus, une caractérisation de ces systèmes grâce à la forme des matrices fondamentales de solutions est donnée dans [Sau00, Section 1.3.2].

Nous connaissons des marqueurs d'irrégularité pour les systèmes différentiels, aux q-différences et de Mahler. Plus précisément, si un système différentiel est irrégulier en 0 nous ne pouvons pas construire ses solutions à l'aide des séries formelles et des briques de base (puissances de z, logarithme etc), il faut rajouter les fonctions de la forme $\exp\left(P(1/z)\right)$, $P \in \mathbb{C}[X]$. Si un système aux q-différences est singulier régulier en 0 alors ses solutions laissent apparaître un quotient équilibré de fonctions Θ_q de Jacobi où

$$\Theta_q(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n.$$

Par exemple, les fonctions de base sont

$$\ell_q(z) := z\frac{\Theta_q'(z)}{\Theta_q} \quad \text{et} \quad e_{q,c}(z) := \frac{\Theta_q(z)}{\Theta_q\left(c^{-1}z\right)},$$

elles vérifient $\sigma_q\left(\ell\right) = \ell + 1$ (il joue un rôle analogue au logarithme) et $\sigma_q\left(e_{q,c}\right) = ce_{q,c}$, $c \in \mathbb{C}$ (il joue un rôle analogue aux puissances de z), voir [Sau00, Section 0.1]. Dans le cas irrégulier, il n'y a plus cet équilibre. Par exemple, la fonction Θ_q de Jacobi est solution de l'équation $\sigma_q(y) = -qzy$, qui est irrégulière en 0. Pour les systèmes de Mahler, il y a aussi un marqueur d'irrégularité. En effet, les solutions des systèmes de Mahler singuliers réguliers en 0 peuvent être construites à l'aide des solutions des systèmes de Mahler constants et des séries de Puiseux tandis que pour les irréguliers, d'après [Roq20], il faut ajouter à cela les séries de Hahn c'est-à-dire l'ensemble des séries de la forme $\sum_{n\in\mathcal{N}} a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{N} \subset \mathbb{Q}$, dont le support $\{n \in \mathcal{N} \mid a_n \neq 0\}$ est un ensemble bien ordonné.

Chapitre 2

Théorème de densité dans le cas régulier

Dans ce chapitre, nous construisons un sous-groupe dense dans le groupe de Galois d'une équation de Mahler régulière en 0, en 1 et en ∞ : nous établissons donc un analogue du théorème de densité de Schlesinger dans le cas particulier des équations régulières. Pour cela, nous utilisons la théorie de Picard-Vessiot, notamment la correspondance de Galois de la théorie de Galois aux différences. Ce qui suit s'organise de la façon suivante. Dans la Section 2.1, nous faisons des rappels sur le revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$ et sur le logarithme $\widetilde{\ln}$ défini sur cette surface. Dans la Section 2.2, nous introduisons les solutions d'un système de Mahler régulier ainsi que des matrices de connexion de Birkhoff. Nous construisons ensuite dans la Section 2.3 des corps de Picard-Vessiot dans le cas particulier des équations de Mahler régulières et, grâce aux matrices de connexion de Birkhoff, nous explicitons des éléments du groupe de Galois d'une équation de Mahler régulière. Puis, nous montrons qu'ils engendrent un sous-groupe Zariski-dense dans le groupe de Galois d'une équation régulière (Théorème 2.3.12).

2.1 Revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$ et fonctions méromorphes

2.1.1 Revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$

On note

$$\widetilde{\mathbb{C}^\star} := \left\{ \left(re^{ib}, b\right) \mid r > 0, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{C}^\star \times \mathbb{R},$$

c'est une surface de Riemann.

Soit

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \widetilde{\mathbb{C}^\star} & \to & \mathbb{C}^\star \\ & \left(re^{ib}, b\right) & \mapsto & re^{ib}. \end{array}$$

L'espace $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ muni de π est le *revêtement universel de* $\mathbb{C}^\star$.

On note $\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$, ce sont des fonctions holomorphes de $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

On note

$$\Sigma_0 := \left\{ \left(re^{ib}, b\right) \mid 0 < r < 1, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^\star},$$

$$\Sigma_\infty := \left\{ \left(re^{ib}, b\right) \mid r > 1, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^\star}$$

et

$$\widetilde{1} := (1, 0) \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}.$$

2.1.2 Fonctions puissances définies sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$

Soit $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \phi_p : & \widetilde{\mathbb{C}^\star} & \to & \widetilde{\mathbb{C}^\star} \\ & \left(re^{ib}, b\right) & \mapsto & \left(re^{ib}, b\right)^p := \left(r^p e^{ipb}, pb\right) \end{array}$$

est holomorphe et bijective. Comme $\phi_p\left(\widetilde{1}\right) = \widetilde{1}$, elle induit une bijection

$$\phi_p : \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\} \to \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}.$$

L'inverse de ϕ_p est

$$\begin{array}{cccc} \phi_p^{-1} : & \widetilde{\mathbb{C}^\star} & \to & \widetilde{\mathbb{C}^\star} \\ & \left(re^{ib}, b\right) & \mapsto & \left(re^{ib}, b\right)^{1/p} := \left(r^{1/p} e^{\frac{ib}{p}}, \frac{b}{p}\right). \end{array}$$

2.1.3 Logarithme défini sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$

On définit

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\ln} : & \widetilde{\mathbb{C}^\star} & \to & \mathbb{C} \\ & \left(re^{ib}, b\right) & \mapsto & \ln(r) + ib\,, \end{array}$$

elle est bijective, holomorphe et sa réciproque est holomorphe : c'est un isomorphisme de surfaces de Riemann. On remarque que

$$\pi = \exp \circ \widetilde{\ln}.$$

On remarque aussi que $\widetilde{\ln}\left(\widetilde{1}\right) = 0$ et $\widetilde{\ln} \circ \phi_p = p\widetilde{\ln}$ c'est-à-dire

$$\forall \widetilde{z} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}, \quad \widetilde{\ln}\left(\widetilde{z}^p\right) = p\widetilde{\ln}\left(\widetilde{z}\right).$$

Remarque 2.1.1. Si ln désigne le logarithme principal, l'égalité $\ln(z^p) = p\ln(z)$ est fausse en général. Elle est vraie si on se restreint aux $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ tels que $|\arg(z)| < \frac{\pi}{p}$.

Pour avoir des résultats locaux, au voisinage de 1 par exemple, on peut utiliser le logarithme principal ln. Mais, globalement, cette remarque et le fait que $\widetilde{\ln}$ est un isomorphisme motivera dans la suite le choix de $\widetilde{\ln}$ plutôt que celui du logarithme principal.

2.1.4 Fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$

Si $\widetilde{g}$ est une fonction méromorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ alors on peut considérer la fonction

$$\widetilde{g} \circ \phi_p : \widetilde{\mathbb{C}^\star} \to \widetilde{\mathbb{C}^\star},$$

elle est méromorphe.

Si g est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^\star$ alors on peut considérer la fonction

$$g \circ \widetilde{\ln} : \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{1\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),$$

elle est méromorphe.

Si g est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ alors on peut considérer la fonction

$$g \circ \widetilde{\ln} : \widetilde{\mathbb{C}^\star} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),$$

elle est méromorphe.

On peut identifier les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^\star$ avec des fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$:

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star) & \hookrightarrow & \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \\ & f & \mapsto & f \circ \pi. \end{array}$$

On notera

$$\pi^\star \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star) = \{f \circ \pi \mid f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star)\}$$

l'image de i, elle est constituée des $\widetilde{g} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ qui sont 2π-invariants en b. Cette identification entre $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\star)$ et $\pi^\star\mathcal{M}(\mathbb{C}^\star)$ est compatible avec $z \mapsto z^p$, que l'on note aussi ϕ_p, i.e. on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star) \arrow[r, "f(z)\mapsto f(z^p)"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star) \arrow[d, hook, "i"] \\ \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \arrow[r, "\widetilde{g}(\widetilde{z})\mapsto\widetilde{g}(\widetilde{z}^p)"'] & \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right). \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Ainsi,

$$\phi_p \circ \pi = \pi \circ \phi_p.$$

Le corps $\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ muni de l'application $\widetilde{g}(\widetilde{z}) \mapsto \widetilde{g}(\widetilde{z}^p)$,

$$\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right), \widetilde{g}(\widetilde{z}) \mapsto \widetilde{g}(\widetilde{z}^p)\right),$$

est un corps aux différences. D'après le diagramme commutatif (2.1),

$$(\mathcal{M}(\mathbb{C}^\star), f(z) \mapsto f(z^p))$$

est un sous-corps aux différences de $\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right), \widetilde{g}(\widetilde{z}) \mapsto \widetilde{g}(\widetilde{z}^p)\right)$.

Soit E un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on note

$$\pi^\star\mathcal{M}(E) := \{f \circ \pi \mid f \in \mathcal{M}(E)\}.$$

On note $D := D(0,1)$ le disque unité ouvert et $\overline{D} := \overline{D}(0,1)$ le disque unité fermé.

Lemme 2.1.2. *Soit $E = D$ ou $E = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}$. Si $h \in \pi^\star \mathcal{M}(E)$ alors $h \circ \phi_p \in \pi^\star \mathcal{M}(E)$.*

Démonstration. Si $h \in \pi^\star \mathcal{M}(E)$ alors il existe $g \in \mathcal{M}(E)$ tel que $h = g \circ \pi$. On a donc

$$h \circ \phi_p = g \circ \pi \circ \phi_p = g \circ \phi_p \circ \pi$$

par le diagramme commutatif (2.1). Or, $g \circ \phi_p \in \mathcal{M}(E)$ ainsi $h \circ \phi_p \in \pi^\star \mathcal{M}(E)$. □

Lemme 2.1.3. *On a les égalités*

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \cap \pi^\star \mathcal{M}(D) = \pi^\star \mathcal{M}(\mathbb{C}), \tag{2.2}$$

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \cap \pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right) = \pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right) \tag{2.3}$$

et

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \cap \pi^\star \mathcal{M}(D) \cap \pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right) = \pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) = \pi^\star \mathbb{C}(z). \tag{2.4}$$

Démonstration. Montrons l'égalité (2.2). Puisque nous avons $\pi^\star \mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \pi^\star \mathcal{M}(D)$ et $\pi^\star \mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ alors

$$\pi^\star \mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \cap \pi^\star \mathcal{M}(D).$$

Soit $f \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \cap \pi^\star \mathcal{M}(D)$. Il existe donc $g \in \mathcal{M}(D)$ tel que $f = \pi^\star g = g \circ \pi$. Puisque $f = g \circ \pi = g \circ \exp \circ \widetilde{\ln} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ et $\widetilde{\ln} : \widetilde{\mathbb{C}^\star} \to \mathbb{C}$ est une bijection holomorphe, alors $g \circ \exp \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. En utilisant que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$ est une fonction holomorphe surjective, on déduit que $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star)$. On a donc obtenu que $f = g \circ \pi$ avec

$$g \in \mathcal{M}(D) \cap \mathcal{M}(\mathbb{C}^\star) = \mathcal{M}(\mathbb{C}),$$

ce qui prouve l'égalité (2.2).

On montre de même l'égalité (2.3). L'égalité (2.4) découle des égalités (2.2) et (2.3) et du fait que

$$\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) = \mathbb{C}(z).$$

□

2.2 Équations de Mahler régulières en 0, 1 et ∞

On rappelle que $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soient f et $\widetilde{g}$ deux fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ respectivement. Par abus de notation, on notera aussi ϕ_p la fonction $\phi_p : f(z) \mapsto f(z^p)$ et la fonction $\phi_p : \widetilde{g}(\widetilde{z}) \mapsto \widetilde{g}(\widetilde{z}^p)$.

Définition 2.2.1. Un *système de Mahler* est un système de la forme

$$\phi_p(Y) = AY \tag{2.5}$$

avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$. L'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ est la *dimension* du système (2.5).

Définition 2.2.2. Soit $z_0 \in \{0, 1, \infty\}$. Le système (2.5) est dit *régulier en* z_0 si A a des coefficients analytiques en z_0 et $A(z_0) = I_n$.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$. On considère le système régulier en 0, 1 et ∞

$$\phi_p(Y) = AY \quad \text{où} \quad A(0) = A(1) = A(\infty) = I_n. \tag{2.6}$$

On cherche à le résoudre au voisinage des points $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$.

Par abus de notation, on notera $\pi^\star$(2.6) le système

$$\phi_p\left(\widetilde{Y}\right) = (\pi^\star A)\,\widetilde{Y}.$$

2.2.1 Solutions en 0 et en l'infini

Nous considérons les matrices $Y^{(0)}(z) = \prod_{j=0}^{+\infty} A\left(z^{p^j}\right)^{-1}$ définie dans un voisinage de 0 et $Y^{(\infty)}(z) = \prod_{j=0}^{+\infty} A\left(z^{p^j}\right)^{-1}$ définie dans un voisinage de l'infini. D'après la proposition suivante, $Y^{(0)}$ (respectivement $Y^{(\infty)}$) est une matrice fondamentale de solutions à coefficients méromorphes en 0 (respectivement en l'infini) de (2.6).

Proposition 2.2.3. *Les matrices $Y^{(0)}$ et $Y^{(\infty)}$ sont des matrices fondamentales de solutions du système* (2.6)*. On a :*

$$Y^{(0)}(z) = \prod_{j=0}^{+\infty} A(z^{p^j})^{-1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right),$$

$$Y^{(\infty)}(z) = \prod_{j=0}^{+\infty} A(z^{p^j})^{-1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right).$$

De plus, les coefficients de $Y^{(0)}$ et $Y^{(\infty)}$ sont des fonctions rationnelles ou ils ont le cercle unité comme frontière naturelle.

Démonstration. Montrons que $Y^{(0)}$ satisfait ces propriétés. Grâce au changement de variable $z \mapsto 1/z$, le résultat pour $Y^{(\infty)}$ s'en déduit. D'après le théorème du vecteur cyclique (voir Théorème 4.3.1), il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ tel que $\phi_p(P)\,AP^{-1} := A_{\mathrm{comp}}$ est une matrice compagnon. D'après un théorème de Randé (voir ([Ran92, Théorèmes 4.2, 4.3] ou [BCR13, Theorem 2])), comme $PY^{(0)}$ est une matrice fondamentale de solutions du système $\phi_p(Y) = A_{\mathrm{comp}}Y$, ses coefficients sont des fonctions rationnelles ou des fonctions méromorphes qui ont le cercle unité comme frontière naturelle, ce qui conclut. □

Corollaire 2.2.4. *En reprenant les notations introduites en Proposition 2.2.3,*

$$\widetilde{Y}^{(0)} := Y^{(0)} \circ \pi = \pi^\star Y^{(0)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(D\right)\right)$$

et

$$\widetilde{Y}^{(\infty)} := Y^{(\infty)} \circ \pi = \pi^\star Y^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

sont solutions du système $\pi^\star$(2.6).

2.2.2 Solution en 1

En faisant le changement de variable $z = \exp(u)$ dans le système (2.6), on obtient le système aux q-différences

$$X(pu) = B(u)X(u)$$

où $X(u) = Y(\exp(u))$ et $B(u) = A(\exp(u))$. De plus, la condition $A(1) = I_n$ est équivalente à $B(0) = I_n$. Pour les équations aux q-différences, on a le résulat suivant (voir par exemple [vdPS97, Lemma 12.4]).

Proposition 2.2.5. *La solution* $G(u) = \prod_{k\geq 1} B(p^{-k}u)$ *du système aux q-différences*

$$X(pu) = B(u)X(u) \tag{2.7}$$

où $B(u) = A(\exp(u))$*,* A *étant la matrice du système* (2.6)*, a des coefficients holomorphes dans un voisinage de* 0*.*

Corollaire 2.2.6. *La matrice* $\widetilde{Y}^{(1)}(\widetilde{z}) := G\left(\widetilde{\ln}(\widetilde{z})\right) = \prod_{k\geq 1} \pi^\star A\left(\widetilde{z}^{p^{-k}}\right)$ *est une solution du système* $\pi^\star$(2.6) *à coefficients méromorphes sur* $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$*.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, la matrice G a des coefficients holomorphes dans un voisinage de 0. Cette matrice est une solution de l'équation (2.7), cela permet de prolonger ses coefficients en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Ainsi, $\widetilde{Y}^{(1)}$ a des coefficients méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$. □

2.2.3 Matrices de Birkhoff

Définition 2.2.7. Soient

$$\widetilde{Y}^{(0)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}(D)\right), \quad \widetilde{Y}^{(1)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right), \quad \widetilde{Y}^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

les solutions du système $\pi^\star$(2.6) construites aux Corollaires 2.2.4 et 2.2.6.

La *matrice de connexion de Birkhoff entre* 0 *et* 1 est

$$\widetilde{C}^{(0)} := \widetilde{Y}^{(1)-1}\widetilde{Y}^{(0)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}(\Sigma_0)\right).$$

La *matrice de connexion de Birkhoff entre* ∞ *et* 1 est

$$\widetilde{C}^{(\infty)} = \widetilde{Y}^{(1)-1}\widetilde{Y}^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}(\Sigma_\infty)\right).$$

Proposition 2.2.8. *Les matrices de connexion de Birkhoff* $\widetilde{C}^{(0)}$ *et* $\widetilde{C}^{(\infty)}$ *vérifient*

$$\phi_p\left(\widetilde{C}^{(i)}\right) = \widetilde{C}^{(i)} \quad \text{sur} \quad \Sigma_i$$

pour $i \in \{0, \infty\}$*.*

Démonstration. Soit $i \in \{0, \infty\}$. Comme $\widetilde{Y}^{(i)}$ et $\widetilde{Y}^{(1)}$ sont solutions du système $\pi^\star$(2.6),

$$\phi_p\left(\widetilde{C}^{(i)}\right) = \phi_p\left(\widetilde{Y}^{(1)}\right)^{-1}\phi_p\left(\widetilde{Y}^{(i)}\right) = \widetilde{Y}^{(1)-1}\left(\pi^\star A\right)^{-1}\left(\pi^\star A\right)\widetilde{Y}^{(i)} = \widetilde{C}^{(i)}.$$

□

2.2.4 Équivalence rationnelle

On considère les systèmes réguliers en 0, 1 et ∞ :

$$\phi_p(Y) = AY, \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z)) \tag{2.8}$$

et

$$\phi_p(Y) = BY, \quad B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z)). \tag{2.9}$$

Soient

$$\widetilde{Y}_A^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\pi^\star \mathcal{M}(D)), \quad \widetilde{Y}_A^{(1)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right), \quad \widetilde{Y}_A^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

les solutions du système $\pi^\star$(2.8) construites aux Corollaires 2.2.4 et 2.2.6. On introduit les matrices de connexion de Birkhoff du système $\pi^\star$(2.8) :

$$\widetilde{C}_A^{(0)} := \widetilde{Y}_A^{(1)-1} \widetilde{Y}_A^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\Sigma_0)),$$
$$\widetilde{C}_A^{(\infty)} = \widetilde{Y}_A^{(1)-1} \widetilde{Y}_A^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\Sigma_\infty)).$$

On définit de même $\widetilde{C}_B^{(0)}$ et $\widetilde{C}_B^{(\infty)}$ pour le système $\pi^\star$(2.9).

Dans cette section, nous allons répondre à la question suivante : Quelles informations les matrices $\widetilde{C}_A^{(0)}$ et $\widetilde{C}_A^{(\infty)}$ nous donnent-elles sur le système (2.8) ?

Définition 2.2.9. On dit que les systèmes (2.8) et (2.9) sont *rationnellement équivalents* si il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ tel que $\phi_p(R) = BRA^{-1}$.

Proposition 2.2.10. *Si $\widetilde{C}_A^{(0)} = \widetilde{C}_B^{(0)}$ et $\widetilde{C}_A^{(\infty)} = \widetilde{C}_B^{(\infty)}$ alors les systèmes (2.8) et (2.9) sont rationnellement équivalents.*

Démonstration. Soit

$$\widetilde{R} := \widetilde{Y}_B^{(1)} \widetilde{Y}_A^{(1)-1}. \tag{2.10}$$

Les égalités

$$\widetilde{C}_A^{(0)} = \widetilde{C}_B^{(0)} \quad \text{et} \quad \widetilde{C}_A^{(\infty)} = \widetilde{C}_B^{(\infty)}$$

impliquent

$$\widetilde{R} = \widetilde{Y}_B^{(0)} \widetilde{Y}_A^{(0)-1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_0, \tag{2.11}$$
$$\widetilde{R} = \widetilde{Y}_B^{(\infty)} \widetilde{Y}_A^{(\infty)-1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_\infty. \tag{2.12}$$

Les égalités (2.10), (2.11), (2.12) montrent respectivement que

$$\widetilde{R} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right), \widetilde{R} \in \mathrm{GL}_n(\pi^\star \mathcal{M}(D)) \text{ et } \widetilde{R} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)\right).$$

Le Lemme 2.1.3 garantit que $\widetilde{R} = \pi^\star R$ où $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$. De plus,

$$\phi_p\left(\widetilde{R}\right) = \phi_p\left(\widetilde{Y}_B^{(1)}\right) \phi_p\left(\widetilde{Y}_A^{(1)}\right)^{-1} = (\pi^\star B) \widetilde{Y}_B^{(1)} \widetilde{Y}_A^{(1)-1} (\pi^\star A)^{-1} = (\pi^\star B) \widetilde{R} (\pi^\star A)^{-1}.$$

Ainsi,

$$\phi_p(R) = BRA^{-1}.$$

$\square$

2.3 Théorème de densité pour les équations de Mahler régulières en 0, 1, ∞

2.3.1 Construction de corps de Picard-Vessiot

Soient

$$\widetilde{Y}^{(0)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(D\right)\right), \quad \widetilde{Y}^{(1)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right), \quad \widetilde{Y}^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

les solutions du système $\pi^\star$(2.6) construites aux Corollaires 2.2.4 et 2.2.6.

Soit

$$k := \cup_{d\geq 1} k_d \quad \text{avec} \quad k_d = \pi^\star \mathbb{C}\left(z^{1/d}\right).$$

Soit $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On munit le corps k de l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi_p : & k & \to & k \\ & f\left(\widetilde{z}\right) & \mapsto & f\left(\widetilde{z}^p\right) \end{array}.$$

Le corps des constantes du corps aux différences (k, ϕ_p) est

$$k^{\phi_p} = \mathbb{C},$$

il est donc algébriquement clos. La caractéristique de k est 0.

Soit

$$L_0 = k\left(\widetilde{Y}^{(0)}\right)$$

l'extension de corps de k engendrée par les coefficients de la matrice $\widetilde{Y}^{(0)}$. De même, on note

$$L_1 = k\left(\widetilde{Y}^{(1)}\right) \quad \text{et} \quad L_\infty = k\left(\widetilde{Y}^{(\infty)}\right).$$

On munit aussi ces trois corps de l'application $\phi_p : f\left(\widetilde{z}\right) \mapsto f\left(\widetilde{z}^p\right)$.

Lemme 2.3.1. *Soit f une fonction méromorphe en 0. Si $\phi_p(f) = f$ alors $f \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Puisque f est méromorphe en 0, elle peut s'écrire

$$f(z) = \sum_{k\geq k_0} a_k z^k \text{ avec } k_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } a_k \in \mathbb{C}.$$

L'égalité $\phi_p(f) = f$ se réécrit

$$\sum_{k\geq k_0} a_k z^{pk} = \sum_{k\geq k_0} a_k z^k. \tag{2.13}$$

L'égalité entre les plus bas degrés de (2.13) donne $pk_0 = k_0$ donc $k_0 = 0$. Par l'égalité (2.13), si p ne divise pas k alors $a_k = 0$ et si p divise k alors $a_{k/p} = a_k$. Ainsi, si p^n est la plus grande puissance de p divisant k,

$$a_k = a_{k/p} = \ldots = a_{k/p^n} = 0.$$

Finalement, $f = a_0 \in \mathbb{C}$. $\square$

Proposition 2.3.2. *Soit R_0 la k-algèbre engendrée par les coefficients de $\widetilde{Y}^{(0)}$ et de* $\det\left(\widetilde{Y}^{(0)}\right)^{-1}$. *L'anneau aux différences (R_0, ϕ_p) est un anneau de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p). Ainsi, le corps aux différences (L_0, ϕ_p) est un corps de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p).*

Démonstration. Comme R_0 est sans diviseur de zéro et que L_0 est le corps des fractions de R_0, si R_0 est un anneau de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p) alors (L_0, ϕ_p) est un corps de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p). Pour montrer que R_0 est un anneau de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p), d'après [vdPS97, Corollary 1.24], il suffit de montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- R_0 n'a pas d'éléments nilpotents ;
- le corps des constantes de L_0, noté $L_0^{\phi_p}$, est k^{ϕ_p} (i.e. $\mathbb{C}$) ;
- il existe une matrice fondamentale de solutions de $\pi^\star$(2.6) dans $\mathrm{GL}_n(R_0)$;
- R_0 est la plus petite k-algèbre vérifiant ces trois propriétés.

Seule l'inclusion $L_0^{\phi_p} \subset \mathbb{C}$ du deuxième point n'est pas immédiate, montrons-la. Soit

$$f \in L_0^{\phi_p} = \{h \in L_0 \mid \phi_p(h) = h\}.$$

Puisque $f \in L_0$, f est de la forme $g \circ \pi$ où

$$g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g_i \text{ avec } \alpha_i \in \cup_{d\geq 1}\mathbb{C}\left(z^{1/d}\right) \text{ et } g_i \in \mathcal{M}(D).$$

Il existe donc $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}\left(z^{1/d}\right)$. Ainsi, $\phi_d(\alpha_i) \in \mathbb{C}(z)$ et puisque $\phi_d(g_i) \in \mathcal{M}(D)$ alors

$$\phi_d(g) \in \mathcal{M}(D).$$

Puisque $f = g \circ \pi$, l'égalité $\phi_p(f) = f$ donne $\phi_p(g) = g$. On obtient que

$$\phi_p(\phi_d(g)) = \phi_d(g).$$

Par le lemme précédent, $\phi_d(g) \in \mathbb{C}$ donc $g \in \mathbb{C}$ et $f = g \circ \pi \in \mathbb{C}$. □

De même, on peut montrer la propositon suivante.

Proposition 2.3.3. *Si R_∞ est la k-algèbre engendrée par les coefficients de $\widetilde{Y}^{(\infty)}$ et de* $\det\left(\widetilde{Y}^{(\infty)}\right)^{-1}$, *l'anneau aux différences (R_∞, ϕ_p) est un anneau de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p). Ainsi, le corps aux différences (L_∞, ϕ_p) est un corps de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p).*

Lemme 2.3.4. *Soit f une fonction méromorphe en 0. Si $f(pz) = f(z)$ alors $f \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. La fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k z^k \text{ avec } a_k \in \mathbb{C}.$$

Si $f(pz) = f(z)$ alors

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k p^k z^k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k z^k$$

et cela implique que $p^k a_k = a_k$. Ainsi, $a_k = 0$ pour tout $k \neq 0$ d'où $f = a_0 \in \mathbb{C}$. □

Proposition 2.3.5. *Soit R_1 la k-algèbre engendrée par les coefficients de $\widetilde{Y}^{(1)}$ et de $\det\left(\widetilde{Y}^{(1)}\right)^{-1}$. L'anneau aux différences (R_1, ϕ_p) est un anneau de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p). Ainsi, le corps aux différences (L_1, ϕ_p) est un corps de Picard-Vessiot de $\pi^\star$(2.6) sur (k, ϕ_p).*

Démonstration. Comme pour la preuve de la Proposition 2.3.2, le seul point non immédiat est l'inclusion

$$L_1^{\phi_p} \subset \mathbb{C},$$

montrons-la. Puisque $L_1 \subset \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$, si $f \in L_1^{\phi_p}$ alors $f = g \circ \widetilde{\ln}$ avec $g := f \circ \widetilde{\ln}^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et $g(pz) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par le lemme précédent, $g \in \mathbb{C}$ d'où $f \in \mathbb{C}$. □

On note

$$G := Gal\,(L_1/k) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\,(L_1/k) \mid \sigma\phi_p = \phi_p\sigma\}$$

le groupe de Galois du système (2.6).

2.3.2 Résultats préliminaires

Lemme 2.3.6. *Si on a l'égalité*

$$\sum_{j=1}^{n} g_j f_j = 0$$

où les f_j sont des fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ et les g_j le sont sur Σ_0 avec $\phi_p(g_j) = g_j$ alors

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{u}) f_j = 0$$

pour tout $\widetilde{u} \in \Sigma_0$ qui n'est pas un pôle des g_j, $j \in \{1, ..., n\}$.

Démonstration. Soit $\widetilde{u} \in \Sigma_0$ qui n'est pas un pôle des g_j. On note $h_{\widetilde{u}}$ la fonction méromorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ définie par

$$h_{\widetilde{u}} = \sum_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{u}) f_j.$$

Comme $\widetilde{u}^{1/p^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{1}$ et que les f_j sont méromorphes au voisinage de $\widetilde{1} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \geq n_0$, les $\widetilde{u}^{1/p^n}$ ne sont pas des pôles des f_j. Par hypothèse, $g_j(\widetilde{u}) = g_j(\widetilde{u}^p)$ donc $g_j(\widetilde{u}) = g_j\left(\widetilde{u}^{1/p^n}\right)$ et

$$\forall n \geq n_0, \quad h_{\widetilde{u}}\left(\widetilde{u}^{1/p^n}\right) = h_{\widetilde{u}^{1/p^n}}\left(\widetilde{u}^{1/p^n}\right) = 0.$$

Ainsi
$$0 = h_{\widetilde{u}}\left(\widetilde{u}^{\frac{1}{p^{n_0}}}\right) = h_{\widetilde{u}}\left(\widetilde{u}^{\frac{1}{p^{n_0+1}}}\right) = ... = h_{\widetilde{u}}\left(\widetilde{u}^{\frac{1}{p^{n_0+n}}}\right) = ...$$
Comme $h_{\widetilde{u}}$ est méromorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ et a une infinité de zéros qui s'accumulent en $\widetilde{1}$, elle est nulle. □

Lemme 2.3.7. *Si on a l'égalité*
$$\sum_{j=1}^{n} g_j f_j = 0$$
où $f_j \in \pi^\star \mathcal{M}(D)$ et $g_j \in \mathcal{M}(\Sigma_0)$ avec $\phi_p(g_j) = g_j$ alors
$$\sum_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{u}) f_j = 0$$
pour tout $\widetilde{u} \in \Sigma_0$ qui n'est pas un pôle des g_j, $j \in \{1, ..., n\}$.

Démonstration. Soit $\widetilde{u} \in \Sigma_0$ qui n'est pas un pôle des g_j. On note
$$h_{\widetilde{u}} := \sum_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{u}) f_j.$$
Par définition, $h_{\widetilde{u}} \in \pi^\star \mathcal{M}(D)$. Comme $\pi\left(\widetilde{u}^{p^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $f_j \in \pi^\star \mathcal{M}(D)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \geq n_0$, les $\widetilde{u}^{p^n}$ ne sont pas des pôles des f_j. Par hypothèse, $g_j(\widetilde{u}) = g_j(\widetilde{u}^p)$ donc $g_j(\widetilde{u}) = g_j\left(\widetilde{u}^{p^n}\right)$ et
$$\forall n \geq n_0, \quad h_{\widetilde{u}}\left(\widetilde{u}^{p^n}\right) = h_{\widetilde{u}^{p^n}}\left(\widetilde{u}^{p^n}\right) = 0.$$
Comme $h_{\widetilde{u}} \in \pi^\star \mathcal{M}(D)$, il existe $k_{\widetilde{u}} \in \mathcal{M}(D)$ tel que $h_{\widetilde{u}} = k_{\widetilde{u}} \circ \pi$ donc
$$0 = k_{\widetilde{u}}\left(\pi\left(\widetilde{u}^{p^{n_0}}\right)\right) = k_{\widetilde{u}}\left(\pi\left(\widetilde{u}^{p^{n_0+1}}\right)\right) = ... = k_{\widetilde{u}}\left(\pi\left(\widetilde{u}^{p^{n_0+n}}\right)\right) = ...$$
Ainsi, $k_{\widetilde{u}}$ est méromorphe sur D et a une infinité de zéros qui ont un point d'accumulation en 0, elle est donc nulle d'où $h_{\widetilde{u}}$ est nulle. □

Lemme 2.3.8. *Si on a l'égalité*
$$\sum_{j=1}^{n} g_j h_j f_j = 0$$
où $h_j \in k := \cup_{d\geq 1} \pi^\star \mathbb{C}\left(z^{1/d}\right)$, $f_j \in \pi^\star \mathcal{M}(D)$ et $g_j \in \mathcal{M}(\Sigma_0)$ avec $\phi_p(g_j) = g_j$ alors
$$\sum_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{u}) h_j f_j = 0$$
pour tout $\widetilde{u} \in \Sigma_0$ qui n'est pas un pôle des g_j, $j \in \{1, ..., n\}$.

Démonstration. On rappelle que l'on note

$$\phi_d : f\left(\widetilde{z}\right) \mapsto f\left(\widetilde{z}^d\right).$$

Il existe $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\phi_d\left(h_j\right) \in \pi^\star \mathbb{C}(z)$. Par hypothèse, on a donc que

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_d\left(g_j h_j f_j\right) = 0$$

avec $\phi_d\left(h_j\right) \in \pi^\star \mathbb{C}(z) \subset \pi^\star \mathcal{M}\left(D\right)$, $\phi_d\left(f_j\right) \in \pi^\star \mathcal{M}\left(D\right)$ (par le Lemme 2.1.2) et avec $\phi_d\left(g_j\right) \in \mathcal{M}\left(\Sigma_0\right)$ vérifiant $\phi_p\left(\phi_d\left(g_j\right)\right) = \phi_d\left(g_j\right)$. Par le lemme précédent,

$$\sum_{j=1}^{n} g_j\left(\widetilde{u}^d\right) \phi_d\left(h_j f_j\right) = 0 \tag{2.14}$$

pour tout $\widetilde{u} \in \Sigma_0$ tel que $\widetilde{v} := \widetilde{u}^d$ n'est pas un pôle des g_j. En composant l'égalité (2.14) par ϕ_d^{-1}, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} g_j\left(\widetilde{v}\right) h_j f_j = 0$$

pour tout $\widetilde{v} \in \Sigma_0$ qui n'est pas un pôle des g_j, $j \in \{1, ..., n\}$. □

2.3.3 Construction d'éléments du groupe de Galois

On rappelle que $k := \cup_{d \geq 1} \pi^\star \mathbb{C}\left(z^{1/d}\right)$.

Notation 2.3.9. Soit $\ell \in \{0, 1, \infty\}$. On introduit l'ensemble I_ℓ des polynômes P de n^2 variables sur k tels que $P\left(\widetilde{Y}^{(\ell)}\right) := P\left(\widetilde{y}_{1,1}^{(\ell)}, ..., \widetilde{y}_{1,n}^{(\ell)}, ..., \widetilde{y}_{n,1}^{(\ell)}, ..., \widetilde{y}_{n,n}^{(\ell)}\right) = 0$ où les $\widetilde{y}_{i,j}^{(\ell)}$ sont les coefficients de la matrice $\widetilde{Y}^{(\ell)}$ introduite au Corollaire 2.2.4 pour $\ell \in \{0, \infty\}$ et au Corollaire 2.2.6 pour $\ell = 1$.

On introduit les deux matrices de connexion de Birkhoff du système (2.6) :

- $\widetilde{C}^{(0)} = \widetilde{Y}^{(1)-1}\widetilde{Y}^{(0)}$, ses coefficients sont méromorphes sur Σ_0.
- $\widetilde{C}^{(\infty)} = \widetilde{Y}^{(1)-1}\widetilde{Y}^{(\infty)}$, ses coefficients sont méromorphes sur Σ_∞.

On rappelle qu'elles vérifient

$$\phi_p\left(\widetilde{C}^{(0)}\right) = \widetilde{C}^{(0)} \quad \text{et} \quad \phi_p\left(\widetilde{C}^{(\infty)}\right) = \widetilde{C}^{(\infty)}.$$

Jusqu'à la fin de la section 2.3.3, on fixe $i \in \{0, \infty\}$.

Théorème 2.3.10. *Soit $\widetilde{u} \in \Sigma_i$ qui n'est pas un pôle de $\widetilde{C}^{(i)}$. Il existe un unique morphisme d'extension de corps de k,*

$$\tau_{\widetilde{u}}^{(i)} : L_i \to L_1$$

qui à chaque coefficient de $\widetilde{Y}^{(i)}$ associe le coefficient correspondant de $\widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u})$. On notera dans la suite, pour simplifier,

$$\begin{array}{cccc} \tau_{\widetilde{u}}^{(i)}: & L_i & \rightarrow & L_1 \\ & \widetilde{Y}^{(i)} & \mapsto & \widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u}). \end{array}$$

De plus, si $\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u})$ est inversible alors $\tau_{\widetilde{u}}^{(i)}$ est un isomorphisme de corps.

Démonstration. L'unicité est claire, montrons l'existence. Soient $X = \{x_{j,l}\}_{j,l\in[|1,n|]}$ des indéterminées sur k et

$$\varphi_i : k[X] \rightarrow k[\widetilde{Y}^{(i)}]$$

l'unique morphisme de k-algèbres tel que $\varphi_i(X) = \widetilde{Y}^{(i)}$. Puisque $I_i = \ker(\varphi_i)$, φ_i induit un isomorphisme de k-algèbres :

$$\overline{\varphi_i} : k\,[X]\,/I_i \rightarrow k[\widetilde{Y}^{(i)}].$$

On obtient de même un isomorphisme

$$\overline{\varphi_1} : k\,[X]\,/I_1 \rightarrow k[\widetilde{Y}^{(1)}].$$

Le morphisme de k-algèbres

$$\begin{array}{cccc} \psi: & k\,[X]\,/I_i & \rightarrow & k\,[X]\,/I_1 \\ & P(X) & \mapsto & P\left(X\widetilde{C}^{(i)}\left(\widetilde{u}\right)\right) \end{array}$$

est bien défini car si $P(X) \in I_i$ alors $0 = P\left(\widetilde{Y}^{(i)}\right) = P\left(\widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}\right)$, cette dernière égalité provenant du fait que $\widetilde{Y}^{(i)} = \widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}$. On rappelle que $\widetilde{Y}^{(1)}$ a des coefficients méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^{\star}}$, $\widetilde{C}^{(i)}$ a des coefficients méromorphes sur Σ_i et $\phi_p\left(\widetilde{C}^{(i)}\right) = \widetilde{C}^{(i)}$. On remarque que $k \subset \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^{\star}}\right)$. On obtient donc que $P\left(\widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}\left(\widetilde{u}\right)\right) = 0$ soit $P\left(X\widetilde{C}^{(i)}\left(\widetilde{u}\right)\right) \in I_1$ par le Lemme 2.3.6 (appliqué directement pour le cas $i = 0$ et appliqué suite au changement de variable $\widetilde{z} \mapsto 1/\widetilde{z}$ pour le cas $i = \infty$).

De plus, si $\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u})$ est inversible, ψ est un isomorphisme puisque l'application suivante est son inverse

$$\begin{array}{ccc} k\,[X]\,/I_1 & \rightarrow & k\,[X]\,/I_i \\ P(X) & \mapsto & P\left(X\widetilde{C}^{(i)}\left(\widetilde{u}\right)^{-1}\right). \end{array}$$

Par le Lemme 2.3.8, elle est bien définie. On peut donc considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} k[X]/I_i \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\overline{\varphi_i}"', "\wr"] & k[X]/I_1 \arrow[d, "\overline{\varphi_1}", "\wr"'] \\ k[\widetilde{Y}^{(i)}] \arrow[r, "\overline{\varphi_1}\psi\overline{\varphi_i}^{-1}"'] & k[\widetilde{Y}^{(1)}]. \end{tikzcd}$$

Il est clair que $\tau_{\widetilde{u}}^{(i)} = \overline{\varphi_1}\psi\overline{\varphi_i}^{-1}$ étendu en un morphisme de $k\left(\widetilde{Y}^{(i)}\right)$ dans $k\left(\widetilde{Y}^{(1)}\right)$ possède toutes les propriétés requises. $\square$

Corollaire 2.3.11. *Soient $\widetilde{u},\widetilde{v}\in\Sigma_i$ tels que $\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u})$ et $\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{v})$ soient bien définies et inversibles. On considère*

$$\tau^{(i)}_{\widetilde{v}}\tau^{(i)^{-1}}_{\widetilde{u}}:\begin{array}{ccc} L_1 & \to & L_1 \\ \widetilde{Y}^{(1)} & \mapsto & \widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{v})\,\widetilde{C}^{(i)}(\widetilde{u})^{-1}. \end{array}$$

Alors $\tau^{(i)}_{\widetilde{v}}\tau^{(i)^{-1}}_{\widetilde{u}}\in G$.

2.3.4 Théorème de densité

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de densité de Schlesinger pour les équations régulières.

Théorème 2.3.12. *Soit Γ le groupe engendré par l'ensemble des applications $\tau^{(0)}_{\widetilde{v}}\tau^{(0)^{-1}}_{\widetilde{u}}$ et $\tau^{(\infty)}_{\widetilde{y}}\tau^{(\infty)^{-1}}_{\widetilde{x}}$ où $\widetilde{u},\widetilde{v}\in\Sigma_0$ et $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\Sigma_\infty$ sont tels que $\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{u})$, $\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{v})$, $\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{y})$ sont définies et inversibles. Le groupe Γ est Zariski-dense dans le groupe de Galois G :*

$$G=\overline{\Gamma}.$$

Démonstration. Par la correspondance de Galois, il faut montrer que $L_1^{\overline{\Gamma}}=k$. Seule l'inclusion $L_1^{\overline{\Gamma}}\subset k$ demande une justification. Soit $h\in L_1^{\overline{\Gamma}}$. Comme $h\in L_1$, il existe une fonction rationnelle P à coefficients dans k telle que

$$h=P\left(\widetilde{Y}^{(1)}\right). \tag{2.15}$$

Puisque h est fixée par tous les éléments de $\overline{\Gamma}$, elle est en particulier fixée par les $\tau^{(0)}_{\widetilde{v}}\tau^{(0)^{-1}}_{\widetilde{u}}$. Ainsi, $h(\widetilde{z})=P\left(\widetilde{Y}^{(1)}(\widetilde{z})\,\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{v})\,\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{u})^{-1}\right)$. Pour $\widetilde{v}=\widetilde{z}$, comme $\widetilde{Y}^{(1)}\widetilde{C}^{(0)}=\widetilde{Y}^{(0)}$,

$$h(\widetilde{z})=P\left(\widetilde{Y}^{(0)}(\widetilde{z})\,\widetilde{C}^{(0)}(\widetilde{u})^{-1}\right). \tag{2.16}$$

De même, comme h est fixée par les $\tau^{(\infty)}_{\widetilde{y}}\tau^{(\infty)^{-1}}_{\widetilde{x}}$, $h(\widetilde{z})=P\left(\widetilde{Y}^{(1)}(\widetilde{z})\,\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{y})\,\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{x})^{-1}\right)$ et pour $\widetilde{y}=\widetilde{z}$,

$$h(\widetilde{z})=P\left(\widetilde{Y}^{(\infty)}(\widetilde{z})\,\widetilde{C}^{(\infty)}(\widetilde{x})^{-1}\right). \tag{2.17}$$

Il existe $d\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que $\phi_d(P)$ a des coefficients dans $\pi^\star\mathbb{C}(z)$. Par l'égalité (2.15), h est méromorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ donc $\phi_d(h)$ l'est aussi. Par le Lemme 2.1.2 et l'égalité (2.16), $\phi_d(h)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\pi^\star\mathcal{M}(D)$. Et, par le Lemme 2.1.2 et l'égalité (2.17), h se prolonge en une fonction méromorphe sur $\pi^\star\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\overline{D}\right)$. Par le Lemme 2.1.3, $\phi_d(h)\in\pi^\star\mathbb{C}(z)$ donc $h\in k$. □

On peut donner une version matricielle de ce théorème. On identifie G avec un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, comme rappelé en Section 1.1.3, et on identifie Γ au groupe engendré par les matrices

$$\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{v}\right)\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}\right)^{-1} \text{ et } \widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{y}\right)\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{x}\right)^{-1}$$

où $\widetilde{u},\widetilde{v}\in\Sigma_0$ et $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\Sigma_\infty$ sont tels que $\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}\right)$, $\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{v}\right)$, $\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{x}\right)$ et $\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{y}\right)$ sont définies et inversibles. Par le Théorème 2.3.12, Γ est Zariski-dense dans le groupe de Galois G :

$$G=\overline{\Gamma}.$$

On montre ci-dessous que le groupe de Galois G est connexe.

Proposition 2.3.13. *Le groupe Γ est connexe.*

Démonstration. Soient

$$E_0:=\left\{\widetilde{u}\in\Sigma_0 \mid \widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}\right) \text{ est définie et inversible}\right\}$$

et

$$E_\infty:=\left\{\widetilde{x}\in\Sigma_\infty \mid \widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{x}\right) \text{ est définie et inversible}\right\}.$$

On note $\Gamma^{(0)}$ (respectivement $\Gamma^{(\infty)}$) le groupe engendré par les matrices $\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{v}\right)\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}\right)^{-1}$ pour tout $\left(\widetilde{u},\widetilde{v}\right)\in E_0^2$ (respectivement $\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{y}\right)\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{x}\right)^{-1}$ pour tout $\left(\widetilde{x},\widetilde{y}\right)\in E_\infty^2$). Ce sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$. On note

$$\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u},\widetilde{v}\right):=\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{v}\right)\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad \widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{x},\widetilde{y}\right):=\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{y}\right)\widetilde{C}^{(\infty)}\left(\widetilde{x}\right)^{-1}$$

pour tous $\widetilde{u},\widetilde{v}\in E_0$, $\widetilde{x},\widetilde{y}\in E_\infty$.

Le groupe $\Gamma^{(0)}$ est connexe par arcs pour la topologie standard. En effet, si $M_1\in\Gamma^{(0)}$ et $M_2\in\Gamma^{(0)}$ alors on peut écrire

$$M_1=\prod_{k=1}^{n_1}\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}_k,\widetilde{v}_k\right) \quad \text{et} \quad M_2=\prod_{k=1}^{n_2}\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}'_k,\widetilde{v}'_k\right)$$

pour certains $\widetilde{u}_k,\widetilde{u}'_k,\widetilde{v}_k,\widetilde{v}'_k\in E_0$ et $n_1,n_2\in\mathbb{N}$. On a $\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k\right)=I_n$, on peut donc supposer que $n_1=n_2$. Pour tout $k\in\{1,\ldots,n_1\}$, on peut trouver un chemin γ_k dans E_0^2 qui relie les points $\left(\widetilde{u}_k,\widetilde{v}_k\right)$ et $\left(\widetilde{u}'_k,\widetilde{v}'_k\right)$ puisque E_0 est égal à $\Gamma^{(0)}$ privé des singularités de $\widetilde{C}^{(0)}$, qui sont en nombre fini. Il existe donc un chemin dans $\Gamma^{(0)}$ qui relie $\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}_k,\widetilde{v}_k\right)$ à $\widetilde{C}^{(0)}\left(\widetilde{u}'_k,\widetilde{v}'_k\right)$. Ainsi, il existe un chemin reliant M_1 et M_2 dans $\Gamma^{(0)}$.

On montre de même que $\Gamma^{(\infty)}$ est connexe par arcs pour la topologie standard. Par définition, Γ est le groupe engendré par les groupes $\Gamma^{(0)}$ et $\Gamma^{(\infty)}$. Puisque $I_n\in\Gamma^{(0)}\cap\Gamma^{(\infty)}$, le groupe Γ est donc connexe par arcs. Le groupe Γ est en particulier connexe pour la topologie standard, il est donc connexe pour la topologie de Zariski. □

Corollaire 2.3.14. *Le groupe de Galois G est un groupe algébrique qui est connexe.*

Démonstration. D'après le Théorème 2.3.12,

$$G=\overline{\Gamma}.$$

D'après la Proposition 2.3.13, Γ est connexe donc G l'est aussi. □

Chapitre 3

Théorème de densité dans le cas singulier régulier

Dans ce chapitre, nous étendons le théorème de densité du Chapitre 2, Théorème 2.3.12, aux équations de Mahler singulières régulières en 0, 1 et ∞. Nous établissons donc un analogue du théorème de densité de Schlesinger pour les équations de Mahler. Pour cela, nous utilisons la théorie des catégories tannakiennes. Remarquons que nous obtenons donc une nouvelle démonstration du Théorème 2.3.12. Ce chapitre est une version française détaillée de l'article [Pou21] et il s'organise de la manière suivante. La Section 3.1 contient des résultats sur les équations de Mahler singulières régulières aux points 0, 1 et ∞. Dans la Section 3.2, nous faisons des rappels sur les critères de densité concernant les groupes et les groupoïdes. La Section 3.3 contient des prérequis sur les catégories des modules et des systèmes aux différences et nous introduisons la catégorie des systèmes de Mahler singuliers réguliers en 0, 1 et ∞. Les Sections 3.4 et 3.5 sont consacrées à la théorie de Galois locale et globale respectivement. Dans la Section 3.6, nous montrons le théorème de densité pour les groupoïdes de Galois des équations de Mahler singulières régulières en 0, 1 et ∞.

3.1 Systèmes de Mahler singuliers réguliers

Définition 3.1.1. Une matrice A est dite *régulière en* $x \in \mathbb{C}$ si ses coefficients sont analytiques en x et $A(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est dite *régulière en* ∞ si $A(1/z)$ est régulière en 0.

3.1.1 Au voisinage de 0

On considère le système de Mahler

$$\phi_p(Y) = AY \tag{3.1}$$

avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\}))$.

Définition 3.1.2. Le système (3.1) est dit *fuchsien strict en* 0 si A est régulière en 0.

Définition 3.1.3. On dit que le système (3.1) est *méromorphiquement équivalent en* 0 au système

$$\phi_p(Y) = BY$$

avec $B \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{z\})\right)$ si il existe $T \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{z\})\right)$, appelée *transformation de jauge*, tel que

$$B = \phi_p(T)^{-1}AT.$$

L'observation suivante justifie l'introduction de cette relation d'équivalence.

Remarque 3.1.4. Soient Z une solution du système (3.1) et $T \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{z\})\right)$ alors

$$\phi_p\left(T^{-1}Z\right) = \underbrace{\phi_p(T)^{-1}AT}_{:=B}T^{-1}Z.$$

Ainsi, $T^{-1}Z$ est solution du système $\phi_p(Y) = BY$.

Définition 3.1.5. Le système (3.1) est dit *singulier régulier en* 0 si il est méromorphiquement équivalent en 0 à un système fuchsien strict en 0 c'est-à-dire si il existe $T \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{z\})\right)$ tel que $\phi_p(T)^{-1}AT$ soit régulière en 0.

Dans la suite, on se fixe une norme $||.||$ sur $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ qui est sous-multiplicative.

Théorème 3.1.6. *On suppose que le système* (3.1) *est fuchsien strict en* 0*. Il existe un unique* $F \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}[[z]]\right)$ *tel que* $F(0) = I_n$ *et*

$$\phi_p(F)^{-1}AF = A(0). \tag{3.2}$$

On a $F \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\{z\}\right)$.

Si on suppose de plus que $A \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right)$ *alors* $F \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right)$.

Démonstration. On utilise un analogue de la méthode de Frobenius pour les équations différentielles ordinaires. Contrairement au cas différentiel, on n'a pas besoin ici de traiter différents cas selon les valeurs propres de $A(0)$. On commence donc par construire une solution formelle, comme cela a été fait en [Roq18, Proposition 34], et on prouve ensuite la convergence de la solution formelle. On cherche $F \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}[[z]]\right)$ tel que

$$\begin{cases} AF = \phi_p(F)A(0) \\ F(0) = I_n\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

On note

$$F(z) = I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} F_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k z^k$$

avec $F_0 = I_n$ et

$$A(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k z^k.$$

On développe les produits matriciels de l'équation $A(z)F(z) = F(z^p)A(0)$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} A_j F_{k-j}\right) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k A_0 z^{pk}.$$

En identifiant les coefficients, on obtient donc que

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, (p \nmid k) \Rightarrow \left(\sum\limits_{j=0}^{k} A_j F_{k-j} = 0\right) \\ \forall k \in \mathbb{N}, (p \mid k) \Rightarrow \left(\sum\limits_{j=0}^{k} A_j F_{k-j} = F_{k/p} A_0\right) \end{cases}.$$

Le système d'équations (3.3) admet donc une unique solution F définie récursivement par

$$\begin{cases} F_0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, (p \nmid k) \Rightarrow F_k = -A_0^{-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} A_j F_{k-j}\right) \\ \forall i \in \mathbb{N}^\star, F_{pi} = A_0^{-1} F_i A_0 - A_0^{-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{pi} A_j F_{pi-j}\right) \end{cases}.$$

Montrons la convergence de F. Soient $f_k := ||F_k||$, $a_k := ||A_k||$, $b := ||A_0^{-1}||$. On introduit la suite $\left(\overline{f_n}\right)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} \overline{f_0} = f_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \overline{f_n} = b \sum\limits_{i=0}^{n-1} (a_{n-i} + a_0)\,\overline{f_i} \end{cases}.$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_k \leq \overline{f_k}$. Pour montrer que les coefficients de F convergent, il suffit de montrer que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{f_k} z^k$ converge. Or, on a

$$\overline{S}(z) := \sum_{j=0}^{+\infty} \overline{f_j} z^j = f_0 + b \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{j-1} (a_{j-i} + a_0)\,\overline{f_i} z^j = f_0 + b \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=i+1}^{+\infty} (a_{j-i} + a_0)\,\overline{f_i} z^j.$$

On obtient donc

$$\overline{S}(z) = f_0 + b\overline{S}(z)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^j + a_0 \sum_{j=1}^{+\infty} z^j\right).$$

Ainsi, $\overline{S}(z) = \dfrac{f_0}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_j z^j + a_0 \sum\limits_{j=1}^{+\infty} z^j\right)}$ et $\overline{S}$ est le développement en série entière à l'origine de cette fonction holomorphe, elle a donc un rayon de convergence non nul.

Il reste à montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(D))$ alors $F \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(D))$. Notons ρ le rayon de convergence de F et prenons $z \in D(0,\rho)$. Par (3.2), on obtient que

$$F(z) = A^{-1}(z)...A^{-1}\left(z^{p^k}\right) F\left(z^{p^{k+1}}\right) A_0^{k+1}.$$

On remarque que si $z \in D$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z^{p^{k+1}} \in D(0,\rho)$. On déduit de cette égalité que F peut être prolongé méromorphiquement à D. Ce prolongement dépend a priori de k mais l'équation fonctionnelle vérifiée par F nous dit que ce n'est pas le cas. $\square$

Corollaire 3.1.7. *Si le système* (3.1) *est singulier régulier en* 0 *et* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ *alors il existe* $F_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(D))$ *et* $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tels que*

$$\phi_p(F_0)^{-1} AF_0 = A_0.$$

Exemple 3.1.8. Le système de dimension 1

$$\phi_p(y) = ay \text{ avec } a(z) = \tfrac{1}{z}$$

est singulier régulier en 0. La fonction $f_0(z) = \sum_{n\geq 0} z^{p^n}$ vérifie

$$\phi_p(f_0)^{-1} af_0 = 1,$$

elle est méromorphe sur D mais elle ne peut pas être prolongée en une fonction méromorphe au-delà du cercle unité.

En général, le cercle unité $\mathscr{C}(0,1)$ est une frontière naturelle. D'après un théorème de Bernard Randé ([Ran92, Théorèmes 4.2, 4.3], [BCR13]), une fonction qui est solution de l'équation de Mahler (3) est rationnelle ou elle a le cercle unité comme frontière naturelle.

Remarque 3.1.9. Si le système (3.1) est singulier régulier en 0, on peut donc ramener l'étude de ses solutions à celles d'un système à coefficients constants. En effet, Z est une solution de $\phi_p(Y) = A_0Y$ si et seulement si F_0Z est une solution de $\phi_p(Y) = AY$ puisque

$$\phi_p(F_0Z) = \phi_p(F_0) A_0Z = A(F_0Z).$$

Expliquons maintenant comment résoudre un système de Mahler à coefficients constants,

$$\phi_p(Y) = CY, \quad C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \tag{3.4}$$

Pour plus de détails, voir [Roq18, Section 5.2]. On considère des fonctions ℓ, e_c, $c \in \mathbb{C}^\star$ satisfaisant

$$\phi_p(\ell) = \ell + 1 \quad \text{et} \quad \phi_p(e_c) = ce_c.$$

Par exemple, on peut poser $\ell(z) = \log\log(z)/\log(p)$ et $e_c(z) = \log(z)^{\log(c)/\log(p)}$. Soit $C = C_uC_s$ la décomposition de Dunford multiplicative de C, c'est-à-dire que C_u (respectivement C_s) est unipotente (respectivement semi-simple) et les matrices C_u, C_s commutent. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}C_sP := D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ est diagonale où on note $d_1,\dots,d_n$ ses coefficients diagonaux. On écrit

$$e_{C_u} = C_u^{\ell} := \exp(\ell\log(C_u)) \quad \text{et} \quad e_{C_s} = P\mathrm{diag}(e_{d_1},\dots,e_{d_n}) P^{-1},$$

ils satisfont $\phi_p(e_{C_u}) = C_u e_{C_u}$ et $\phi_p(e_{C_s}) = C_s e_{C_s}$. On pose $e_C := e_{C_u} e_{C_s}$. En utilisant les conditions de commutativité, on a

$$\phi_p(e_C) = Ce_C.$$

La matrice e_C est une matrice fondamentale de solutions de (3.4).

3.1.2 Au voisinage de l'infini

On considère le système de Mahler

$$\phi_p(Y) = AY \tag{3.5}$$

avec $A \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\right)$.

Définition 3.1.10. Le système (3.5) est dit *fuchsien strict en l'infini* si A est régulière en ∞.

Définition 3.1.11. Le système (3.5) est dit *singulier régulier en l'infini* si il est méromorphiquement équivalent en l'infini, i.e. via une transformation de jauge $T \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\right)$, à un système fuchsien strict en l'infini.

En utilisant le changement de variable $z \to 1/z$, on obtient des résultats similaires à ceux obtenus au voisinage de 0, dans la Section 3.1.1. En particulier, on déduit du Corollaire 3.1.7 le résultat suivant.

Corollaire 3.1.12. *Si le système (3.5) est singulier régulier en l'infini et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ alors il existe $F_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)\right)$ et $A_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que*

$$\phi_p(F_\infty)^{-1} AF_\infty = A_\infty.$$

3.1.3 Au voisinage de 1

Étudions maintenant les équations de Mahler singulières régulières en 1. On considère le système de Mahler

$$\phi_p(Y) = AY \tag{3.6}$$

avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-1\}))$.

On définit, comme précédemment en 0 et en l'infini, la notion de système fuchsien strict en 1 et de système singulier régulier en 1.

Définition 3.1.13. Le système (3.6) est dit *fuchsien strict en* 1 si A est régulière en 1.

Définition 3.1.14. Le système (3.6) est dit *singulier régulier en* 1 si il est méromorphiquement équivalent en 1, i.e. via une transformation de jauge $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-1\}))$, à un système fuchsien strict en 1.

Afin d'étudier le système (3.6), on le transforme en un système aux q-différences en posant $z = \exp(u)$:

$$X(pu) = B(u)X(u) \tag{3.7}$$

avec $B(u) = A(\exp(u))$. Localement, pour transformer ce système aux q-différences en un système de Mahler (3.6), on pourra utiliser le logarithme principal ln car il est biholomorphe entre un voisinage de 1 et un voisinage de 0. Mais, globalement, on ne pourra plus utiliser ln, on considérera donc le logarithme $\widetilde{\ln}$ défini sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$, le revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$ (voir Section 2.1.3).

Notation 3.1.15. On rappelle que

$$\widetilde{\mathbb{C}^\star} := \left\{ \left(re^{ib}, b\right) \mid r > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et que

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\ln} : & \widetilde{\mathbb{C}^\star} & \to & \mathbb{C} \\ & \left(re^{ib}, b\right) & \mapsto & \ln(r) + ib \end{array}$$

est holomorphe et bijectif.

On rappelle aussi que $\pi := \exp \circ \widetilde{\ln}$ et que si W est une matrice à coefficients méromorphes sur $\mathbb{C}^\star$, on note pour $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}$,

$$\pi^\star W(\widetilde{z}) = W((\pi(\widetilde{z}))).$$

D'après [Sau00, Section 1.1], on a le résultat suivant.

Lemme 3.1.16. *Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ régulière en 0. Il existe $G \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ et $C_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que*

$$G(pu)^{-1}B(u)G(u) = C_0.$$

Illustrons ce résultat avec un exemple.

Exemple 3.1.17. On considère le système aux q-differences

$$X(pz) = B(z)X(z) \quad \text{avec} \quad B(z) = \begin{pmatrix} p & \exp(2z) \\ 0 & \exp(z) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

La matrice B est régulière en 0. D'après [Sau00, Section 1.1], afin de construire les matrices $G \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ et $C_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $G(pz)^{-1}B(z)G(z) = C_0$, il y a deux étapes qui sont similaires à la méthode de Frobenius pour les équations différentielles ordinaires :

- On transforme le système (3.8) en un système non résonnant à l'origine

  $$Y(pz) = C(z)Y(z),$$

  c'est-à-dire un système tel que C est régulière en 0 et deux valeurs propres distinctes λ et μ de $C(0)$ sont telles que $\dfrac{\lambda}{\mu}$ n'appartient pas à l'ensemble $p^{\mathbb{Z}}$. Cela se fait en utilisant des matrices inversibles à coefficients constants Q_j et des matrices de "shearing" S_k qui sont de la forme

$$S_k = \begin{pmatrix} zI_l & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, X peut s'écrire $X = \underbrace{Q_1 S_1 ... Q_r S_r}_{:=M} Y$ et $C(z) = M(pz)^{-1}B(z)M(z)$. De plus, par construction, la matrice $C(0)$ a les mêmes valeurs propres que $B(0)$ modulo $p^{\mathbb{Z}}$. Dans notre exemple, les valeurs propres de $B(0)$ sont 1 et p, le système (3.8) est donc résonnant à l'origine. En suivant [Sau00, Section 1.1], on pose

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1/(1-p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ils satisfont $Q^{-1}B(0)Q = \operatorname{diag}(p, 1)$ et si $M := QS$,

$$C(z) := (M(pz))^{-1} B(z)M(z) = \begin{pmatrix} 1 & g(z) \\ 0 & \exp(z) \end{pmatrix}$$

où $g(z) = \frac{\exp(z)-p+(p-1)\exp(2z)}{p(p-1)z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Le système $Y(pz) = C(z)Y(z)$ est non résonnant à l'origne.

- Il existe une unique matrice $H \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ telle que $H(0) = I_n$ et

$$H(pz)^{-1}C(z)H(z) = C(0).$$

  Les coefficients du développement en série de H sont déterminés par une relation de récurrence.

Les matrices $G := MH$ et $C_0 := C(0)$ satisfont les conditions requises.

Théorème 3.1.18. *On suppose que le système de Mahler (3.6) est fuchsien strict en* 1 *et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$. Il existe $\widetilde{F_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right)$ et $C_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que,*

$$\phi_p\left(\widetilde{F_1}\right)^{-1}(\pi^\star A)\widetilde{F_1} = C_0.$$

Démonstration. On transforme le système (3.6) en le système aux q-différences (3.7), d'après le lemme précédent, $\widetilde{F_1} := G \circ \widetilde{\ln}$ convient. □

Exemple 3.1.19. On considère le système de Mahler

$$\phi_p(Y) = AY \quad \text{avec} \quad A(z) = \begin{pmatrix} p & z^2 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

il est fuchsien strict en 1. Avec les notations de l'Exemple 3.1.17, puisque $\pi^\star A = B \circ \widetilde{\ln}$, la matrice $\widetilde{F_1} := G \circ \widetilde{\ln}$ satisfait $\phi_p\left(\widetilde{F_1}\right)^{-1}(\pi^\star A)\widetilde{F_1} = C_0$.

Corollaire 3.1.20. *Si le système* (3.6) *est singulier régulier en* 1 *et* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ *alors il existe* $A_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $\widetilde{F_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right)$ *tels que*

$$\phi_p\left(\widetilde{F_1}\right)^{-1}(\pi^\star A)\,\widetilde{F_1} = A_1.$$

Afin de prouver le théorème de densité de Schlesinger ou un analogue de ce théorème, les deux principales approches sont la théorie de Picard-Vessiot et la dualité tannakienne (voir par exemple [vdPS97, Sau03]). Dans [vdPS97, Theorem 1.32], les auteurs ont prouvé qu'un groupe de Galois dans la théorie de Picard-Vessiot peut être vu comme un groupe d'automorphismes d'un certain foncteur fibre ω, c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$. Ainsi, un groupe de Galois est un groupe de Galois tannakien. De plus, deux foncteurs fibres définis sur une même catégorie tannakienne neutre sont isomorphes donc ces deux théories coïncident. Dans la suite, on utilise l'approche tannakienne. L'objectif de la section suivante est de faire des rappels sur des définitions et des critères de densité que l'on utilisera dans cette partie, dans le cadre d'une approche tannakienne.

3.2 Critères de densité pour les groupoïdes

Dans cette section, nous énonçons les critères de densité pour les groupoïdes. [1]

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

3.2.1 Groupoïdes de Galois d'une catégorie tannakienne

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k. Tous les foncteurs fibres ω considérés dans cette section sont supposés à valeurs dans k,

$$\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k).$$

Groupoïdes de Galois

Définition 3.2.1. Le *groupoïde de Galois de la catégorie tannakienne neutre* $\mathcal{C}$ est la catégorie ayant pour objets les foncteurs fibres, et pour morphismes, les isomorphismes tensoriels de foncteurs fibres.

Soit $\mathcal{X}$ un objet de $\mathcal{C}$ et $\langle\mathcal{X}\rangle$ la sous-catégorie tannakiennne de $\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{X}$ (i.e. la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{X}$ et un objet identité, qui est stable par produits tensoriels, sommes directes et par passages au dual, aux sous-objets et aux quotients). Le *groupoïde de Galois de* $\mathcal{X}$ est un groupoïde ayant pour objets les $\omega_{|\langle\mathcal{X}\rangle}$ où ω est un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ (i.e. les restrictions des foncteurs ω à la sous-catégorie $\langle\mathcal{X}\rangle$), et pour morphismes, les isomorphismes tensoriels des foncteurs fibres $\omega_{|\langle\mathcal{X}\rangle}$. On le note $\mathrm{Gal}(\mathcal{X})$.

1. Un grand merci à Jacques Sauloy qui a répondu à mes nombreuses questions sur les groupoïdes de Galois et dont les remarques ont permis d'améliorer cette section.

En particulier, le groupoïde de Galois G d'une catégorie tannakienne neutre est une petite catégorie dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme : c'est un groupoïde au sens de la théorie des catégories. On verra que ce groupoïde est muni d'une structure algébrique supplémentaire : une structure de groupoïde proalgébrique. Dans la section suivante, on rappelle les définitions de groupes et groupoïdes proalgébriques.

Définitions : groupes et groupoïdes proalgébriques

Pour plus de détails sur les groupes proalgébriques, on pourra consulter [Kov73].

Définition 3.2.2. Soient G un groupe et S un ensemble non vide de sous-groupes normaux de G. On suppose que pour tout $H \in S$, G/H est muni d'une structure de groupe algébrique sur k. On dit que (G,S) est un *groupe proalgébrique* si il vérifie :

1. si $H, H' \in S$ alors $H \cap H' \in S$;
2. si $H \in S$ alors les $H' \in S$ tels que $H \subset H'$ sont exactement les images inverses par l'application canonique $\phi : G \to G/H$ des sous-groupes algébriques normaux de G/H ;
3. si $H, H' \in S$ et si $H \subset H'$, la projection canonique $G/H \to G/H'$ est un morphisme de groupes algébriques ;
4. l'application naturelle $G \to \varprojlim G/H$ est une bijection de G sur la limite projective des groupes $G/H, H \in S$.

On appelle S *l'ensemble de définition* de G.

Dans la suite on notera parfois G au lieu de (G,S).

Comme expliqué dans [Ser60, Section 2.1], les deux premières conditions expriment une condition de saturation pour l'ensemble S (analogue à celles d'un atlas dit complet pour une variété). On peut remplacer les deux premières conditions (1) et (2) par la condition

$(1-2)'$. S est un ensemble filtrant décroissant

puisqu'il existerait dans ce cas une seule manière de prolonger cet ensemble S pour le rendre “complet”, c'est-à-dire vérifiant toutes les hypothèses de la définition précédente.

Exemple 3.2.3. Un groupe algébrique G sur k est un groupe proalgébrique dont l'ensemble de définition S est l'ensemble des sous-groupes algébriques sur k de G qui sont normaux.

On a la définition suivante (voir [Kov73, Chapter I, Section 2] et plus particulièrement [Kov73, Proposition 12]).

Définition 3.2.4. Soient (G,S) et (G',S') deux groupes proalgébriques et $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupes. On dit que ϕ est un *morphisme de groupes proalgébriques* si il satisfait les conditions suivantes :

- pour tout $H' \in S'$, $\phi^{-1}(H') \in S$;
- les applications $G/\phi^{-1}(H') \to G'/H'$ induites par ϕ sont des morphismes de groupes algébriques.

Définition 3.2.5. Soient G un groupe proalgébrique et V un k-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une *représentation d'un groupe proalgébrique* G si ρ est un morphisme de groupes proalgébriques.

Pour la définition suivante, voir [Kov73, Proposition 4].

Définition 3.2.6. Soit (G, S) un groupe proalgébrique. On dit que G' est un *sous-groupe fermé* du groupe proalgébrique G si pour tout $H \in S$ il existe un sous-groupe algébrique fermé G'_H de G/H tel que :

- si $H \subset H'$ avec $H, H' \in S$ alors l'image de G'_H dans G/H' par la projection canonique est égale à $G'_{H'}$;
- $G' = \varprojlim G'_H$.

Cette définition est justifiée par le résultat suivant, voir [Kov73, Proposition 5].

Proposition 3.2.7. *Soit* (G, S) *un groupe proalgébrique. Un sous-groupe fermé* G' *du groupe proalgébrique* G *est un groupe proalgébrique ayant pour ensemble de définition*

$$S' = \{G' \cap H \mid H \in S\}.$$

Définition 3.2.8. On dira qu'un ensemble a une structure de schéma affine sur k si c'est l'ensemble des points sur k d'un schéma affine sur k.

On rappelle que la notion de "groupes proalgébriques" et de "schémas en groupes affines" sur un corps k algébriquement clos sont équivalentes dans le sens suivant : les schémas en groupes affines de type fini sur k sont des généralisations des groupes algébriques sur k. Ainsi, en passant à la limite projective, un groupe proalgébrique s'identifie naturellement à un schéma en groupes affine. Réciproquement, un schéma en groupes affine G sur k définit un groupe proalgébrique, qui est la limite projective de groupes algébriques G_i (voir [vdPS03, Corollary B.17] pour plus de précisions). Ainsi, le groupe des points sur k du schéma en groupes affine G est la limite projective des groupes des points sur k des G_i (car cela peut être pris point par point, rappelé en [BHHW21, Section 2.1]). Étant donné que k est algébriquement clos, le groupe des points sur k des G_i s'identifie à G_i. Ainsi, le groupe des points sur k du schéma en groupes affine G est naturellement muni d'une structure de groupe proalgébrique et cette donnée suffit à déterminer le schéma en groupes affine.

Définition 3.2.9. Une petite catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme (i.e. un groupoïde au sens des catégories) est appelée *groupoïde proalgébrique* (respectivement *groupoïde algébrique*) si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous $x, y, z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$:

- tous les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, y)$ ont une structure de schémas affines sur k (respectivement de schémas affines de type fini sur k) ;
- les applications de composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, z)$$

  sont des morphismes de schémas affines ;

- le morphisme identité $Id_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$ est l'unité $\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$ du schéma en groupes affine $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$;
- les inverses $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)$ sont des morphismes de schémas affines.

Notation 3.2.10. Soit G un groupoïde dont les objets sont les éléments de la classe Obj. Si $a, b \in \mathrm{Obj}$, on note $G(a,b)$ l'ensemble des morphismes de G de a dans b.

Définition 3.2.11. Soit G un groupoïde dont les objets sont les éléments de la classe Obj. Une *représentation du groupoïde G* est un foncteur $\mathscr{R} : G \to \mathrm{Vect}^f(k)$ qui associe à $a \in \mathrm{Obj}$ un k-espace vectoriel de dimension finie V_a, et qui associe à $x \in G(a,b)$ une application linéaire de V_a dans V_b.

Si G est un groupoïde (pro)algébrique. Une *représentation du groupoïde (pro)algébrique* G est une représentation du groupoïde G telle que les applications $G(a,b) \to \mathrm{Hom}(V_a, V_b)$ sont des morphismes de schémas affines sur k.

Structure de groupoïde (pro)algébrique des groupoïdes de Galois

Théorème 3.2.12. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre, ω un foncteur fibre de $\mathcal{C}$ et $\langle \mathcal{X} \rangle$ la sous-catégorie tannakienne engendrée par un objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$. On note $g(\mathcal{X}) := \eta_{\mathcal{X}}$ si $g = (\eta_{\mathcal{Y}})_{\mathcal{Y} \in \mathrm{Obj}(\langle \mathcal{X} \rangle)} \in \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle \mathcal{X} \rangle}\right)$. Le morphisme*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle \mathcal{X} \rangle}\right) & \to & \mathrm{Aut}(\omega(\mathcal{X})) \\ g & \mapsto & g(\mathcal{X}) \end{array}$$

est injectif. Il identifie le groupe $\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle \mathcal{X} \rangle}\right)$ à un sous-groupe algébrique, noté $G(\mathcal{X})$, du groupe linéaire $\mathrm{Aut}(\omega(\mathcal{X})) \simeq \mathrm{GL}_n(k)$, n étant le rang *de $\mathcal{X}$ i.e. la dimension du k-espace vectoriel $\omega(\mathcal{X})$.*

Pour toute k-algèbre commutative R, il existe un foncteur tensoriel canonique

$$\phi_R : \mathrm{Vect}^f(k) \to \mathrm{Mod}_R, \quad V \rightsquigarrow V \otimes_k R.$$

Si $\omega_1, \omega_2 : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k)$ sont deux foncteurs tensoriels alors on note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ le foncteur de k-algèbres tel que

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)(R) = \mathrm{Hom}^{\otimes}(\phi_R \circ \omega_1, \phi_R \circ \omega_2).$$

De même, on note $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ le foncteur de k-algèbres tel que

$$\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)(R) = \mathrm{Iso}^{\otimes}(\phi_R \circ \omega_1, \phi_R \circ \omega_2)$$

et

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega) = \underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}(\omega, \omega).$$

Remarque 3.2.13. D'après [DM82, Proposition 1.13], puisque $(\mathcal{C}, \otimes)$ est rigide, on a que

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2) = \underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2).$$

D'après [DM82, Theorem 2.11], on a le théorème suivant.

Théorème 3.2.14. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k et $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k)$ un foncteur fibre. Le foncteur de k-algèbres $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ est représenté par un schéma en groupes affine sur k, noté G'. De plus, le foncteur*

$$\mathcal{C} \to \mathcal{R}ep_k(G')$$
$$\begin{cases} \mathcal{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) & \rightsquigarrow \rho : g \in G' \mapsto g(\mathcal{X}) \in \mathrm{Aut}(\omega(\mathcal{X})) \\ f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) & \rightsquigarrow \omega(f) \end{cases}$$

est une équivalence de catégories tensorielles.

Corollaire 3.2.15. *Le groupe $G = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ est le groupe des points sur k du schéma en groupes affine G' : c'est un groupe proalgébrique qui est la limite projective des groupes algébriques $G(\mathcal{X})$ i.e.*

$$G = \varprojlim G(\mathcal{X}), \quad \mathcal{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}).$$

Démonstration. Par le théorème précédent, en notant A la k-algèbre de G', $G' = \mathrm{spec}(A)$,

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(k) = \mathrm{Hom}_{\text{k-alg}}(A, k) = G'(k).$$

Puisque $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(k) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) = G$ alors G est donc le groupe des points sur k de G'. C'est donc un groupe proalgébrique qui est la limite projective des groupes $\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$, $\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, or ces groupes sont respectivement identifiés aux groupes algébriques $G(\mathcal{X})$ par le Théorème 3.2.12 (voir [DM82, Proposition 2.8] pour plus de précisions).

Donnons quelques précisions supplémentaires sur la structure de groupe proalgébrique de G. Si $g = (\eta_{\mathcal{Y}})_{\mathcal{Y} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \in G$ alors on note $g_{|\langle\mathcal{X}\rangle} := (\eta_{\mathcal{Y}})_{\mathcal{Y} \in \mathrm{Obj}(\langle\mathcal{X}\rangle)}$. Pour tout $\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, les morphismes

$$\begin{array}{rccc} r_{\mathcal{X}} : & G & \to & \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right) \\ & g & \mapsto & g_{|\langle\mathcal{X}\rangle} \end{array}$$

sont surjectifs (voir la preuve de [DM82, Proposition 2.8] : en notant $G_{\mathcal{X}}(k) := r_{\mathcal{X}}(G)$, il est démontré que $\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right) = G_{\mathcal{X}}(k)$). L'ensemble S de définition de G est l'ensemble des noyaux $K_{\mathcal{X}}$ de ces morphismes. Par le Théorème 3.2.12, $G/K_{\mathcal{X}}$ est isomorphe au groupe algébrique $G(\mathcal{X})$. □

On identifiera par la suite G et G'. D'après [DM82, Theorem 3.2], on a aussi ce théorème.

Théorème 3.2.16. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k et ω_1, ω_2 deux foncteurs fibres à valeurs dans k, $\omega_1, \omega_2 : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k)$. Le foncteur de k-algèbres $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ est représenté par un schéma affine H.*

Corollaire 3.2.17. *L'ensemble $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ des isomorphismes tensoriels de ω_1 dans ω_2 est l'ensemble des points sur k du schéma affine H.*

Par les corollaires 3.2.15 et 3.2.17, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.2.18. *Le groupoïde de Galois de $\mathcal{C}$ est un groupoïde proalgébrique.*

On a aussi le résultat suivant.

Proposition 3.2.19. *Le groupoïde de Galois de $\mathcal{X}$ est un groupoïde algébrique.*

Démonstration. Soient $\mathcal{X}$ un objet de $\mathcal{C}$ et ω, η deux foncteurs fibres à valeurs dans k. L'ensemble

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}\left(\omega_{|\langle\mathcal{X}\rangle}, \eta_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$$

est l'ensemble des points sur k d'un schéma affine de type fini sur k puisque dans ce cas $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}(\omega, \eta)$ est représenté par $H = \mathrm{spec}(W)$ avec W une k-algèbre de type fini (voir [DM82, Theorem 3.2(a)]). Plus précisément, en reprenant les notations de la preuve de [DM82, Theorem 3.2(a)], on a dans ce cas $W = \eta\left(P_{\mathcal{X}}^{\vee}\right)$ où $P_{\mathcal{X}} \in \mathrm{Obj}\left(\langle\mathcal{X}\rangle\right)$ et la structure tensorielle de $\mathcal{C}$ définit une structure de k-algèbre sur W. □

Structure de groupoïde transitif : du groupoïde au groupe proalgébrique

Définition 3.2.20. Un groupoïde est dit *transitif* si aucun des ensembles d'isomorphismes entre ses objets n'est vide.

Exemple 3.2.21. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k. Le groupoïde de Galois G de $\mathcal{C}$ est transitif. En effet, les objets de G sont les foncteurs fibres $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k)$ et deux foncteurs fibres définis sur une même catégorie tannakienne neutre sont isomorphes (voir [Del90, 1.10] ou [DM82, p. 148-149]).

Proposition 3.2.22. *Si un groupoïde G est transitif alors G est une catégorie équivalente à ses sous-catégories pleines.*

Démonstration. Soient G' une sous-catégorie pleine de G et $\mathscr{F} : G' \to G$ le foncteur inclusion. Le foncteur $\mathscr{F}$ est plein et fidèle. Par transitivité de G, il est aussi essentiellement surjectif. Ainsi, $\mathscr{F}$ est une équivalence de catégories. □

Corollaire 3.2.23. *Soient G le groupoïde de Galois de $\mathcal{C}$ et ω un foncteur fibre sur $\mathcal{C}$ alors G est équivalent à la catégorie ayant un seul objet ω et dont les morphismes sont les éléments du groupe proalgébrique*

$$\mathrm{Hom}_G(\omega, \omega) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega).$$

On peut donc identifier le groupoïde de Galois G au groupe proalgébrique $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$. De même, on peut identifier $\mathrm{Gal}(\mathcal{X})$, le groupoïde de Galois d'un objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, au groupe algébrique $G(\mathcal{X})$.

3.2.2 Théorème de Chevalley et applications

Théorème de Chevalley et applications aux groupes (pro)algébriques

Théorème 3.2.24 (de Chevalley)**.** *Soient G un groupe algébrique affine sur k et H un sous-groupe fermé de G. Il existe alors une représentation rationnelle $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$, E étant un k-espace vectoriel, et une droite $D \subset E$ telles que*

$$H = \{g \in G \mid \rho(g)D = D\}.$$

Démonstration. Voir [Bor91, p.89]. □

Dans la suite, pour alléger la terminologie, on utilisera le terme "représentation d'un groupe algébrique" au lieu de "représentation rationnelle d'un groupe algébrique".

Corollaire 3.2.25. *Si pour toutes les représentations ρ de G, les droites D qui sont stables par le sous-groupe fermé H (i.e. si pour tout $h \in H$, $\rho(h)D = D$) le sont aussi par G, alors $H = G$.*

Démonstration. Par le théorème précédent, on obtient que

$$H = \{g \in G \mid \rho(g)D = D\} = G,$$

la dernière égalité venant du fait que, par hypothèse, D est aussi stabilisée par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$. □

La proposition suivante est l'analogue du Corollaire 3.2.25 pour les groupes proalgébriques.

Proposition 3.2.26. *Soit G' un sous-groupe fermé d'un groupe proalgébrique G. Si pour toutes les représentations ρ du groupe proalgébrique G, les droites D qui sont stables par G' le sont aussi par G, alors $G' = G$.*

Démonstration. En reprenant les notations de la définition d'un sous-groupe fermé d'un groupe proalgébrique (G, S), Définition 3.2.6, on a

$$G' = \varprojlim G'_H = \bigcap_{H \in S} r_H^{-1}(G'_H) \quad \text{avec} \quad G'_H \subset G/H.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $g_0 \in G \backslash G'$. Il existe donc $H \in S$ tel que $g_0 \notin r_H^{-1}(G'_H)$. Par le Corollaire 3.2.25, il existe une représentation ρ_H de G/H et une droite D telles que

$$G'_H = \{g \in G/H \mid \rho_H(g)D = D\}.$$

Soit $\rho := \rho_H r_H$, c'est une représentation du groupe proalgébrique G. En considérant l'action de ρ, la droite D est stable par G'. Mais, elle n'est pas stable par G puisque

$$\rho(g_0)D = \rho_H \underbrace{(r_H(g_0))}_{\notin G'_H} D$$

n'est pas égal à D, ce qui est une contradiction. □

Avant de donner un analogue du Corollaire 3.2.25 pour les groupoïdes proalgébriques transitifs, nous faisons des rappels sur les représentations de groupoïdes transitifs.

Des propriétés de représentations de groupoïdes transitifs

Lemme 3.2.27. *Il y a une bijection naturelle entre les représentations $\mathscr{R}$ d'un groupoïde proalgébrique transitif G et les représentations $\rho : G(x,x) \to \mathrm{GL}(V_x)$ de l'un quelconque de ses groupes $G(x,x)$, $x \in \mathrm{Obj}(G)$. Cette bijection n'est pas canonique, elle nécessite le choix de morphismes.*

Démonstration. Si une représentation de G est donnée alors on en déduit une représentation ρ de $G(x,x)$.

On peut étendre une représentation ρ du groupe $G(x,x)$ en une représentation de G. Si G a qu'un seul objet, qui est x, ceci est clair. Supposons que G a plusieurs objets. On peut étendre ρ comme ceci :

- pour tout $x_i \in \mathrm{Obj}(G)$, on pose $\mathscr{R}(x_i) = V_x \in \mathrm{Vect}^f(k)$;
- pour tout $h \in G(x,x)$, on pose $\mathscr{R}(h) = \rho(h)$;
- pour tout $x_i \in \mathrm{Obj}(G) \setminus \{x\}$, on choisit un morphisme $h_i \in G(x_i, x)$ (un tel h_i existe car G est transitif) pour lequel on choisit $\mathscr{R}(h_i) \in \mathrm{GL}\,(V_x)$. Si $x_i = x$ alors on choisit $h_i = id$ (donc $\mathscr{R}(h_i) = Id \in \mathrm{GL}\,(V_x)$).

Soient $x_i, x_j \in \mathrm{Obj}(G)$, on définit

$$\forall g \in G(x_i, x_j), \quad \mathscr{R}(g) := \mathscr{R}(h_j)^{-1} \rho\left(h_j g h_i^{-1}\right) \mathscr{R}(h_i).$$

On vérifie que c'est bien défini et que l'on obtient bien une représentation. Ces choix déterminent entièrement une représentation de groupoïdes. □

Remarque 3.2.28. Pour étendre ρ en une représentation de G, on a posé $\mathscr{R}(x_i) = V_x$. On aurait pu choisir un autre espace vectoriel V (au lieu de V_x) mais V et V_x doivent être des k-espaces vectoriels de même dimension puisque les morphismes de G sont des isomorphismes. De plus, si on fait d'autres choix de morphismes dans le troisième point précédent, on étend ρ en une représentation $\mathcal{R}'$ de G qui est conjuguée à $\mathcal{R}$. En effet, si on choisit $k_i \in G(x_i, x)$ et $\mathscr{R}'(k_i) \in \mathrm{GL}\,(V_x)$, au lieu de $h_i \in G(x_i, x)$ et $\mathscr{R}(h_i) \in \mathrm{GL}\,(V_x)$, on a

$$\forall g \in G(x_i, x_j), \quad \mathscr{R}'(g) := \mathscr{R}'(k_j)^{-1} \rho\left(k_j g k_i^{-1}\right) \mathscr{R}'(k_i) = \Psi_j \mathcal{R}(g) \Psi_i^{-1}$$

avec $\Psi_i := \mathcal{R}'\left(k_i\right)^{-1} \mathcal{R}\left(k_i\right) = \mathcal{R}'\left(h_i\right)^{-1} \mathcal{R}\left(h_i\right) \in \mathrm{GL}\,(V_x)$.

On peut traduire le Lemme 3.2.27 de manière plus intrinsèque :

Corollaire 3.2.29. *Le foncteur "restriction" $\mathscr{G} : \mathcal{R}ep(G) \to \mathcal{R}ep(G_x)$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations d'un groupoïde proalgébrique transitif G et la catégorie des représentations du groupoïde G_x ayant un seul objet $x \in \mathrm{Obj}(G)$ et ayant pour morphismes les éléments de $G(x,x)$.*

Démonstration. On peut montrer que le foncteur $\mathscr{G}$ est fidèle et plein. Montrons qu'il est essentiellement surjectif. Soit ρ une représentation du groupoïde G_x alors la représentation $\mathscr{R}$ construite dans la démonstration du Lemme 3.2.27 est telle que $\mathscr{G}\,(\mathscr{R}) = \rho$. □

Remarque 3.2.30. Soient G le groupoïde de Galois d'une catégorie tannakienne neutre sur k, notée $\mathcal{C}$, et ω un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ à valeurs dans k. D'après le Lemme 3.2.27 et le fait que G est transitif (Exemple 3.2.21), on peut donc identifier $\mathcal{R}ep(G)$ avec la catégorie des représentations du groupe proalgébrique $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$, où $\omega \in \mathrm{Obj}(G)$. De plus, d'après [DM82, Theorem 2.11], la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des représentations de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$, elle est donc équivalente à $\mathcal{R}ep(G)$. De manière générale, si G' est un sous-groupoïde proalgébrique transitif de G alors $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{R}ep(G')$.

Une application aux groupoïdes proalgébriques transitifs

Définition 3.2.31. Soit G un groupoïde. Un *sous-groupoïde* de G est un sous-groupoïde de G au sens des catégories.

Soit G un groupoïde algébrique (respectivement proalgébrique). Un *sous-groupoïde algébrique (resp. proalgébrique)* H de G est un sous-groupoïde de G tel que pour tous $x, y \in \mathrm{Obj}(H)$, $H(x,y)$ a une structure de schéma affine sur k (resp. de schéma affine de type fini sur k) et les compositions et les inverses sont des morphismes de schémas affines.

Soit H sous-groupoïde (pro)algébrique d'un groupoïde (pro)algébrique G. Le groupoïde H a donc une structure de groupoïde (pro)algébrique qui provient de celle de G.

Définition 3.2.32. On considère une représentation

$$\mathscr{R} : G \to \mathrm{Vect}^f(k), \quad x \in \mathrm{Obj}(G) \rightsquigarrow V_x \in \mathrm{Obj}\left(\mathrm{Vect}^f(k)\right),$$

d'un groupoïde G et une famille de droites $(D_{x_i})_{x_i \in \mathrm{Obj}(G)}$ avec $D_{x_i} \subset V_{x_i}$. Cette famille de droites est dite *globalement stable par* G sous l'action induite par $\mathscr{R}$ si pour tous $x_i, x_j \in \mathrm{Obj}(G)$ et tout $g \in G(x_i, x_j)$, on a

$$\mathscr{R}(g)\, D_{x_i} = D_{x_j}.$$

Corollaire 3.2.33. *Soient G un groupoïde proalgébrique transitif et H un sous-groupoïde proalgébrique transitif de G tels que $\mathrm{Obj}(H) = \mathrm{Obj}(G)$. Si pour toutes les représentations $\mathscr{R}$ de G, les familles de droites $(D_{x_i})_{x_i \in \mathrm{Obj}(G)}$ qui sont globalement stables par H sont aussi globalement stables par G, alors $H = G$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe deux objets x_1, x_2 de G tels que $g \in G(x_1, x_2) \setminus H(x_1, x_2)$. Puisque H est transitif, il existe $h \in H(x_1, x_2)$. Ainsi,

$$hg \in G(x_1, x_1) \setminus H(x_1, x_1).$$

Par la Proposition 3.2.26, il existe une représentation $\rho : G(x_1, x_1) \to \mathrm{GL}(V)$ du groupe proalgébrique $G(x_1, x_1)$ et une droite D telles que D est laissée stable par $H(x_1, x_1)$ mais pas par $G(x_1, x_1)$. Comme dans le Lemme 3.2.27, on peut étendre la représentation ρ en une représentation $\mathscr{R}$ de G. On peut la choisir telle que la famille de droites $(D_{x_i})_{x_i \in \mathrm{Obj}(G)}$ est globalement stable par H mais pas globalement stable par G : on peut par exemple choisir $\mathscr{R}$ telle que

- $\mathscr{R}(x_i) = V$ pour tout $x_i \in \mathrm{Obj}(G)$;

- si $g \in G(x_1, x_1)$, $\mathscr{R}(g) := \rho(g)$;
- pour tout $x_i \in \mathrm{Obj}(G) \setminus \{x_1\}$, on choisit un $h_i \in H(x_i, x_1)$ et on pose

$$\mathscr{R}(h_i) := Id \in \mathrm{GL}(V).$$

L'existence de cette représentation laissant D globalement stable par H mais ne laissant pas D globalement stable par G est une contradiction. □

3.2.3 Critères de densité

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k et ω un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ à valeurs dans k.

Pour les groupes

Définition 3.2.34. On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe proalgébrique G est *Zariski-dense* dans G si tout sous-groupe fermé de G qui contient H est égal à G.

On reprend les notations du Théorème 3.2.12.

Théorème 3.2.35. *Soit H un sous-groupe de $G = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$. On note, pour un objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, $H(\mathcal{X})$ l'image de H dans $G(\mathcal{X})$.*

On suppose que pour tout objet $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$, pour tout $y \in \omega(\mathcal{Y})$, si la droite $\mathrm{vect}_k(y)$ est stable par $H(\mathcal{Y})$ alors elle l'est aussi par $G(\mathcal{Y})$.

On a alors :

- *pour tout objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, $H(\mathcal{X})$ est Zariski-dense dans $G(\mathcal{X})$;*
- *H est Zariski-dense dans G.*

Démonstration. Ce théorème découle du Corollaire 3.2.25 et du fait que $\mathcal{C}$ est une catégorie tannakienne neutre. Plus précisément, $\mathcal{C}$ est une catégorie tannakienne neutre sur k donc elle est équivalente à la catégorie des représentations sur k de G (cf [DM82, Theorem 2.11]). On note

$$\mathscr{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{R}ep_k(G)$$

cette équivalence de catégories, $\mathscr{F}$ associe à $\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, la représentation $\rho : g \mapsto g(\mathcal{X})$. D'après le Corollaire 3.2.25, on a donc que le plus petit groupe algébrique qui contient $H(\mathcal{X})$ est égal à $G(\mathcal{X})$, ce qui conclut pour le premier point. Pour le deuxième point, étant donné que $\overline{H} = \varprojlim \overline{H(\mathcal{X})}$ (voir [Kov73, p.509]) et que d'après le premier point $\overline{H(\mathcal{X})} = G(\mathcal{X})$, on a

$$\overline{H} = \varprojlim G(\mathcal{X}) = G,$$

la dernière égalité provenant du Corollaire 3.2.15. □

Pour les groupoïdes

Définition 3.2.36. On dit qu'un sous-groupoïde H d'un groupoïde (pro)algébrique G est *Zariski-dense* dans G si tout sous-groupoïde (pro)algébrique de G qui contient H est égal à G.

Théorème 3.2.37. *Soit G un groupoïde de Galois d'une catégorie tannakienne neutre $\mathcal{C}$ qui est transitif et soit H un sous-groupoïde transitif de G tel que $\mathrm{Obj}(H) = \mathrm{Obj}(G)$. On note, pour un objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, $H(\mathcal{X})$ l'image de H dans $G(\mathcal{X}) := \mathrm{Gal}(\mathcal{X})$.*

On suppose que pour tout objet $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{C}$, pour tout $\omega_i \in \mathrm{Obj}(G)$, pour tout $y_i \in \omega_i(\mathcal{Y})$, si les droites $\mathrm{vect}_k(y_i)$ sont globalement stables par $H(\mathcal{Y})$ alors elles le sont aussi par $G(\mathcal{Y})$.

Alors,

- *pour tout objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$, $H(\mathcal{X})$ est Zariski-dense dans $G(\mathcal{X})$;*
- *H est Zariski-dense dans G.*

Démonstration. D'après le Corollaire 3.2.29, il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations du groupoïde transitif G et la catégorie des représentations de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$, $\omega \in \mathrm{Obj}(G)$. Or, cette catégorie est équivalente à la catégorie tannakienne neutre $\mathcal{C}$. On conclut, comme dans la preuve du Théorème 3.2.35, grâce au Corollaire 3.2.33. $\square$

3.3 Systèmes aux différences et modules aux différences

3.3.1 Catégories des modules et des systèmes aux différences

Pour plus de détails, on pourra consulter [vdPS97, Section 1.4].

Soient K un corps de caractéristique 0 et $\phi : K \to K$ un automorphisme de corps. On étend ϕ à l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans K en appliquant ϕ à chaque coefficient des matrices.

La catégorie des modules aux différences

Définition 3.3.1. Un *module aux différences* sur le corps aux différences (K, ϕ) est un K-espace vectoriel M de dimension finie muni d'un automorphisme

$$\Phi_M : M \to M$$

qui est ϕ-linéaire, i.e.

$$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in M, \Phi_M(x + \lambda y) = \Phi_M(x) + \phi(\lambda)\, \Phi_M(y).$$

On le note (M, Φ_M).

Les objets de la *catégorie des modules aux diffférences* sont les modules aux différences

$$(M, \Phi_M).$$

Si (M, Φ_M) et (N, Φ_N) sont deux modules aux différences, les morphismes Ψ de (M, Φ_M) dans (N, Φ_N) sont les applications K-linéaires $\Psi : M \to N$ telles que $\Phi_N \circ \Psi = \Psi \circ \Phi_M$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "\Psi"'] & M \arrow[d, "\Psi"] \\ N \arrow[r, "\Phi_N"'] & N . \end{tikzcd}$$

Soit

$$C_K = K^{\phi} = \{x \in K \mid \phi(x) = x\}$$

le *corps des constantes*. D'après [vdPS97], la catégorie des modules aux différences est une catégorie tensorielle abélienne rigide C_K-linéaire. Le foncteur oubli, qui oublie la structure aux différences, de la catégorie des modules aux différences dans la catégorie $\mathrm{Vect}^f(K)$ des K-espaces vectoriels de dimension finie

$$\begin{cases} (M, \Phi_M) \rightsquigarrow M \\ f \rightsquigarrow f \end{cases}$$

est un foncteur fibre. Ainsi, la catégorie des modules aux différences est une catégorie tannakienne sur C_K.

Remarque 3.3.2. Si C_K est algébriquement clos, d'après [vdPS97, Section 1.4], la catégorie des modules aux différences est une catégorie tannakienne neutre sur C_K. Par la théorie des catégories tannakiennes, cette catégorie est donc équivalente à la catégorie des représentations d'un schéma en groupes affine.

Pour mieux comprendre ce qui suit, on donne ici plus de détails sur la structure tensorielle de la catégorie des modules aux différences. Soient (M, Φ_M) et (N, Φ_N) deux objets de cette catégorie. Leur produit tensoriel est $(M \otimes_K N, \Phi_{M \otimes_K N})$ où $\Phi_{M \otimes_K N}$ est l'automorphisme

$$\Phi_{M \otimes_K N} : \begin{array}{ccc} M \otimes_K N & \to & M \otimes_K N \\ m \otimes n & \mapsto & \Phi_M(m) \otimes \Phi_N(n). \end{array}$$

Le K-espace vectoriel de dimension 1, noté $\mathbf{1} = Ke$, muni de l'automorphisme ϕ-linéaire $\Phi_{\mathbf{1}} : e \to e$ est un objet identité de cette catégorie et on peut vérifier que

$$C_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(\mathbf{1}, \mathbf{1}) .$$

Le Hom interne est

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,((M, \Phi_M)\,, (N, \Phi_N)) = \left(\mathrm{Hom}_K\,(M, N)\,, \Phi_{\mathrm{Hom}_K(M,N)}\right)$$

où $\mathrm{Hom}_K\,(M, N)$ est le K-espace vectoriel des morphismes K-linéaires de M dans N et $\Phi_{\mathrm{Hom}_K(M,N)}$ est l'automorphisme ϕ-linéaire

$$\Phi_{\mathrm{Hom}_K(M,N)} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K\,(M, N) & \to & \mathrm{Hom}_K\,(M, N) \\ \sigma & \mapsto & \Phi_N \circ \sigma \circ \Phi_M^{-1} . \end{array}$$

Le dual de l'objet (M, Φ_M) est l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}\left((M, \Phi_M), (\mathbf{1}, \Phi_{\mathbf{1}})\right)$ c'est-à-dire l'objet

$$\left(\mathrm{Hom}_K(M, K), \sigma \in \mathrm{Hom}_K(M, K) \mapsto \sigma \circ \Phi_M^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(M, K)\right).$$

On remarque que la catégorie des modules aux différences est équivalente, en tant que catégorie abélienne, à sa sous-catégorie pleine dont les objets sont les K-espaces vectoriels K^n, $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathrm{Diff}(K, \phi)$ cette sous-catégorie. On identifie les morphismes $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Diff}(K,\phi)}\left((K^m, \Phi_{K^m}), (K^n, \Phi_{K^n})\right)$ avec des matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(K)$. On choisit l'ordre suivant sur le produit tensoriel de deux bases ordonnées de K^{n_1} et K^{n_2}, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{array}{rcl} \{1, ..., n_1\} \times \{1, ..., n_2\} & \to & \{1, ..., n_1 n_2\} \\ (i_1, i_2) & \mapsto & i_2 + n_2(i_1 - 1). \end{array}$$

Cela donne les isomorphismes

$$K^{n_1} \otimes_K K^{n_2} \to K^{n_1 n_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{n_1,m_1}(K) \otimes_K \mathcal{M}_{n_2,m_2}(K) \to \mathcal{M}_{n_1 n_2, m_1 m_2}(K).$$

Plus précisément, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p_1,n_1}(K)$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p_2,n_2}(K)$ alors

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & ... & a_{1,n_1}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p_1,1}B & \cdots & a_{p_1,n_1}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_1 p_2, n_1 n_2}(K)$$

en utilisant l'identification précédente entre $A \otimes B \in \mathcal{M}_{p_1,n_1}(K) \otimes_K \mathcal{M}_{p_2,n_2}(K)$ et une matrice de $\mathcal{M}_{p_1 p_2, n_1 n_2}(K)$. Ce produit tensoriel sur les matrices est appelé *produit de Kronecker*. Cette construction fournit une équivalence de catégories tensorielles abéliennes entre la catégorie des modules aux différences et la catégorie $\mathrm{Diff}(K, \phi)$. Ainsi, $\mathrm{Diff}(K, \phi)$ est aussi une catégorie tannakienne sur C_K avec le foncteur oubli comme foncteur fibre à valeurs dans K.

La catégorie des systèmes aux différences

Les objets de la *catégorie des systèmes aux différences* sont les couples

$$(K^n, A)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. L'entier n est appelé le *rang* de l'objet. Les morphismes de l'objet (K^{n_1}, A) dans l'objet (K^{n_2}, B) sont les $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(K)$ tels que

$$\phi(R)A = BR.$$

Pour simplifier les notations, on notera souvent A l'objet (K^n, A). Cet objet est identifié au système $\phi(Y) = AY$.

La catégorie des modules aux différences et la catégorie des systèmes aux différences sont équivalentes

Comme la catégorie des modules aux différences est équivalente à Diff (K, ϕ), pour montrer l'équivalence annoncée dans le titre, il suffit de montrer que la catégorie des systèmes aux différences est équivalente à la catégorie Diff (K, ϕ).

Proposition 3.3.3. *La catégorie Diff (K, ϕ) et la catégorie des systèmes aux différences sont équivalentes par le foncteur $\mathscr{F}$ qui associe à un objet (K^n, A) de la catégorie des systèmes aux différences, le module aux différences $(K^n, \Phi_{K^n}) \in \mathrm{Obj}\,(\mathit{Diff}\,(K, \phi))$ où Φ_{K^n} est l'application ϕ-linéaire telle que*

$$\Phi_{K^n} : Y \in K^n \mapsto A^{-1}\phi(Y) \in K^n.$$

Le foncteur $\mathscr{F}$ associe au morphisme $R : (K^{n_1}, A) \rightarrow (K^{n_2}, B)$ de la catégorie des systèmes aux différences, le morphisme

$$\Psi : Y \in K^{n_1} \mapsto RY \in K^{n_2}$$

de la catégorie Diff (K, ϕ).

Démonstration. Le foncteur $\mathscr{F}$ est bien défini sur les objets car Φ_{K^n} est par construction un automorphisme ϕ-linéaire. Il est aussi bien défini sur les morphismes puisque l'égalité $\phi(R)A = BR$ équivaut à $\Phi_{K^{n_2}} \circ \Psi = \Psi \circ \Phi_{K^{n_1}}$:

$$\phi(R)A = BR \Leftrightarrow B^{-1}\phi(R) = RA^{-1} \Leftrightarrow \Phi_{K^{n_2}} \circ \Psi = \Psi \circ \Phi_{K^{n_1}}.$$

Le foncteur $\mathscr{F}$ est une équivalence de catégories car c'est un foncteur :

- essentiellement surjectif. En effet, soit $(K^n, \Phi_{K^n}) \in \mathrm{Obj}\,(\mathrm{Diff}\,(K, \phi))$. Soit $(b_i)_{i \in [|1,n|]}$ la base canonique de K^n et on note A' la matrice dont les colonnes sont les coefficients des $\Phi_{K^n}(b_i)$ dans la base $(b_i)_{i \in [|1,n|]}$. Comme Φ_{K^n} est injectif, son noyau est réduit à $\{0\}$ donc A' est une matrice inversible. Soit $A := A'^{-1}$ alors $\mathscr{F}(A) = (K^n, \Phi_{K^n})$.
- plein et fidèle. Soit $\Psi \in \mathrm{Hom}\,((K^{n_1}, \Phi_{K^{n_1}}), (K^{n_2}, \Phi_{K^{n_2}}))$. Il existe un unique morphisme $R \in \mathrm{Hom}\,((K^{n_1}, A), (K^{n_2}, B))$ tel que $\mathscr{F}(R) = \Psi$ puisque R est la matrice de l'application K-linéaire Ψ par rapport aux bases canoniques de K^{n_1} et K^{n_2}.

□

L'équivalence entre la catégorie des modules aux différences et la catégorie des systèmes aux différences est une équivalence entre catégories abéliennes (voir Proposition A.1.9 de l'annexe). Pour que cette équivalence soit aussi une équivalence entre catégories tensorielles, il suffit de munir la catégorie des systèmes aux différences du produit tensoriel suivant, en utilisant le produit de Kronecker : si (K^{n_1}, A) et (K^{n_2}, B) sont deux objets alors

$$(K^{n_1}, A) \otimes (K^{n_2}, B) = (K^{n_1 n_2}, A \otimes B)$$

et si R_1 et R_2 sont deux morphismes, leur produit tensoriel est $R_1 \otimes R_2$. L'équivalence entre la catégorie des systèmes aux différences et la catégorie des modules aux différences est une équivalence de catégories tensorielles abéliennes. Par la Proposition A.2.6 de l'annexe, la catégorie des systèmes aux différences est une catégorie tensorielle rigide. Finalement, c'est une catégorie tensorielle abélienne rigide C_K-linéaire. C'est une catégorie tannakienne sur C_K munie du foncteur oubli $(K^n, A) \rightsquigarrow K^n$, $R \rightsquigarrow R$, qui est un foncteur fibre.

Donnons quelques détails sur la structure tensorielle héritée par la catégorie des systèmes aux différences. Comme expliqué ci-dessus, le produit tensoriel est défini grâce au produit de Kronecker. L'objet $(K, 1)$ est un objet identité. Soient (K^{n_1}, A) et (K^{n_2}, B) deux objets de cette catégorie, le Hom interne est

$$\underline{\mathrm{Hom}}\left((K^{n_1}, A), (K^{n_2}, B)\right) = (K^{n_1 n_2}, D_{A,B})$$

où $D_{A,B}$ est l'inverse de la matrice représentant l'application C_K-linéaire

$$Y \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(K) \mapsto B^{-1}\phi(Y)A$$

dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n_2,n_1}(K)$. Le dual de l'objet (K^{n_1}, A) est

$$\underline{\mathrm{Hom}}\left((K^{n_1}, A), (K, 1)\right) = \left(K^{n_1}, \left({}^tA\right)^{-1}\right).$$

3.3.2 Systèmes aux différences ayant un endomorphisme de corps non surjectif

On suppose ici que $\phi : K \to K$ est un endomorphisme (on enlève l'hypothèse de surjectivité de la Section 3.3.1) et on note $\mathcal{E}_{\text{inj}}$ la catégorie des systèmes aux différences lorsque $\phi : K \to K$ n'est pas supposé surjectif. On va montrer que $\mathcal{E}_{\text{inj}}$ est aussi une catégorie tannakienne sur C_K munie du foncteur oubli $(K^n, A) \rightsquigarrow K^n$, $R \rightsquigarrow R$. Avant cela, nous faisons quelques rappels sur la clôture inversive d'un corps. Pour plus de détails, on pourra consulter [Coh65, Chapter 2, Section 5].

Définition 3.3.4. Soient K un corps et $\phi : K \to K$ un endomorphisme de corps. Soit K' une extension du corps K munie d'un endomorphisme $\phi' : K' \to K'$ tel que $\phi'_{|K} = \phi$. On dit que K' est une clôture inversive de K si l'endomorphisme $\phi' : K' \to K'$ est un automorphisme de corps et si K'/K est la plus petite extension de corps vérifiant cela. On notera aussi ϕ l'automorphisme ϕ'.

D'après [Coh65, Theorem II, p.66], on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.5. *Tout corps K muni d'un endomorphisme ϕ possède une clôture inversive qui est unique à isomorphisme près.*

Dans la suite, on considère une clôture inversive de K que l'on note $\widehat{K}$ munie de l'automorphisme $\phi : \widehat{K} \to \widehat{K}$.

Le lemme suivant est une conséquence de la construction donnée dans [Coh65] de la clôture inversive, il est rappelé dans [NPQ12, Lemme 1.1.6].

Lemme 3.3.6. *Pour tout $x \in \widehat{K}$ il existe $r = r(x) \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\phi^r(x) \in K$.*

Proposition 3.3.7. *La catégorie $\mathcal{E}_{inj}$ est une catégorie tannakienne sur C_K.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}_{\mathrm{surj}}$ la catégorie des systèmes aux différences ayant pour corps de base $\widehat{K}$ et pour automorphisme $\phi : \widehat{K} \to \widehat{K}$. D'après la Section 3.3.1, c'est une catégorie tannakienne sur C_K. La catégorie $\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}$ est une sous-catégorie tensorielle rigide de $\mathcal{E}_{\mathrm{surj}}$. En effet, elle est stable par produits tensoriels, elle contient un objet identité, les Hom internes et chaque objet a un dual (voir Section 3.3.1 pour une description de ces éléments). Pour montrer que c'est une sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{E}_{\mathrm{surj}}$, le seul point non immédiat qu'il nous reste à montrer est l'existence des noyaux et des conoyaux dans $\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}$. Montrons que tous les morphismes dans $\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}$ ont un noyau dans $\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}$. L'existence des conoyaux s'en déduit puisque la dualité échange les noyaux et les conoyaux. Soient $A, B \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}\right)$, de rang respectif n_1 et n_2, et $R \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}}(A, B)$. Le morphisme R a un noyau $(C, R_{\mathrm{ker}} : C \to A)$ dans la catégorie tannakienne $\mathcal{E}_{\mathrm{surj}}$. D'après le Lemme 3.3.6, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^r(C), \phi^r(R_{\mathrm{ker}})$ ont des coefficients dans K. Soit

$$F_A = \left(\prod_{i=1}^{r} \phi^{r-i}(A)\right)^{-1} \in \mathrm{GL}_{n_1}(K).$$

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R"] & B \\
\phi^r(A) \arrow[u, "F_A"] \arrow[r, "\phi^r(R)"] & \phi^r(B) \arrow[u, "F_B"'] \\
\phi^r(C) \arrow[u, "\phi^r(R_{\mathrm{ker}})"] \arrow[ur, dotted, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

donc $(\phi^r(C), F_A\phi^r(R_{\mathrm{ker}}) : \phi^r(C) \to A)$ est un noyau de R dans la catégorie $\mathcal{E}_{\mathrm{inj}}$. □

Par la Remarque 3.3.2, l'injection $\mathcal{E}_{\mathrm{inj}} \to \mathcal{E}_{\mathrm{surj}}$ et la proposition précédente, on a donc le résultat suivant.

Corollaire 3.3.8. *Si le corps des constantes C_K est algébriquement clos, la catégorie $\mathcal{E}_{inj}$ est une catégorie tannakienne neutre sur C_K.*

3.3.3 La catégorie des systèmes de Mahler avec différents corps de base

La catégorie $\mathcal{E}(K_{p^\infty})$

Soit

$$K_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 0} K_{p^n} \quad \text{où} \quad K_{p^n} = \mathbb{C}\left(z^{1/p^n}\right).$$

La catégorie des systèmes aux différences (introduite dans la Section 3.3.1) où $K = K_{p^\infty}$ et l'automorphisme de K est $\phi = \phi_p$ défini par

$$\begin{array}{cccc} \phi_p : & K & \to & K \\ & f(z) & \mapsto & f\left(z^p\right) \end{array}$$

est la catégorie des systèmes de Mahler ayant pour corps de base K_{p^∞}. On la note $\mathcal{E}\left(K_{p^\infty}\right)$. Dans ce cas, le corps des constantes est $C_K = K^{\phi_p} = \mathbb{C}$. D'après la Section 3.3.1, c'est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.

Remarque 3.3.9. On peut remplacer le corps $\mathbb{C}$ par n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique 0.

La catégorie $\mathcal{E}$

On considère la catégorie des systèmes de Mahler dont le corps de base est $K = \mathbb{C}(z)$ muni de l'endomorphisme ϕ_p (qui n'est pas surjectif dans ce cas). Ses objets sont les couples $(\mathbb{C}(z)^n, A)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ et les morphismes de $(\mathbb{C}(z)^{n_1}, A)$ dans $(\mathbb{C}(z)^{n_2}, B)$ sont les $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}(z))$ tels que $\phi_p(R)A = BR$. On la note $\mathcal{E}$. C'est une sous-catégorie de $\mathcal{E}\left(K_{p^\infty}\right)$.

D'après le Corollaire 3.3.8, on a le résultat suivant.

Proposition 3.3.10. *La catégorie $\mathcal{E}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.*

Les catégories $\mathcal{E}^{(0)}$, $\mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}^{(\infty)}$

Dans la suite, on considérera aussi la catégorie des systèmes de Mahler dont le corps de base est $K = \mathbb{C}(\{z\})$ (respectivement $K = \mathbb{C}(\{z-1\})$ et $K = \mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)$) munie de ϕ_p, on la notera $\mathcal{E}^{(0)}$ (respectivement $\mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}^{(\infty)}$). Ce sont aussi des catégories tannakiennes neutres sur $\mathbb{C}$. En effet, les catégories $\mathcal{E}^{(0)}$ et $\mathcal{E}^{(\infty)}$ sont tannakiennes d'après le Corollaire 3.3.8. La catégorie $\mathcal{E}^{(1)}$ est tannakienne d'après la Section 3.3.1 puisque $\phi_p : z \in \mathbb{C}(\{z-1\}) \mapsto z^p$ est un automorphisme de $\mathbb{C}(\{z-1\})$.

Remarque 3.3.11. Deux objets de la catégorie $\mathcal{E}^{(0)}$ (respectivement $\mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}^{(\infty)}$) sont isomorphes si et seulement si les systèmes correspondants sont méromorphiquement équivalents en 0 (resp. 1 et ∞).

3.3.4 Catégories des systèmes de Mahler singuliers réguliers et des systèmes de Mahler fuchsiens stricts en $0, 1, \infty$

La catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ des systèmes de Mahler singuliers réguliers en 0, 1 et ∞

On note $\mathcal{E}_{sr}$ la *catégorie des systèmes de Mahler singuliers réguliers en* $0, 1$ *et* ∞. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les couples

$$(\mathbb{C}(z)^n, A)$$

où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ est telle que le système $\phi_p(Y) = AY$ est singulier régulier en 0, 1 et ∞.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on omettra $\mathbb{C}(z)^n$ dans la définition des objets de $\mathcal{E}_{sr}$.

La catégorie $\mathcal{E}_{fs}$ des systèmes de Mahler fuchsiens stricts en $0, 1$ et ∞

On note $\mathcal{E}_{fs}$ la *catégorie des systèmes de Mahler fuchsiens stricts en* 0, 1 *et* ∞. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les couples

$$(\mathbb{C}(z)^n, A)$$

où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ est régulière en $0, 1$ et ∞.

La catégorie $\mathcal{E}_{fs}$ est par définition une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{sr}$.

Les catégories $\mathcal{E}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{fs}$ sont équivalentes

Notation 3.3.12. On note $D_{i,u}$ la matrice identité dont on a remplacé le coefficient diagonal de la $i^{\text{ème}}$ ligne par u. C'est une matrice diagonale dite de dilatation. On note $T_{i,\underline{l}}$ où $\underline{l} = (l_1, ..., l_n)$ la matrice identité dont on a remplacé la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\underline{l}$:

$$D_{i,u} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & u & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_{i,\underline{l}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_i & \cdots & l_{n-1} & l_n \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de ces matrices sont des matrices de même forme.

Lemme 3.3.13. *Toute matrice $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\}))$ peut s'écrire sous la forme*

$$M_0 = C^{(0)} R^{(0)}$$

avec

- $C^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ *qui peut s'écrire sous la forme*

  $$C^{(0)} = u^{-k} T_{i_1,\underline{l_1}} D_{i_1,v_1} \cdots T_{i_r,\underline{l_r}} D_{i_r,v_r}$$

  où $u, v_1, ..., v_r \in \mathbb{C}(z)$ ont une valuation en 0 qui vaut 1 (i.e. 0 est zéro simple), $k \in \mathbb{N}$ et $\underline{l_1}, ..., \underline{l_r} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$;
- $R^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\}))$ *régulière en* 0.

Démonstration. La preuve est identique à celle de [Sau00, Section 1.3.1, Corollaire 1] pour des matrices $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$. $\square$

Lemme 3.3.14. *Toute matrice $M_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-1\}))$ peut s'écrire sous la forme*

$$M_1 = C^{(1)} R^{(1)}$$

avec

- $C^{(1)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ *régulière en* 0 *et* ∞ *qui peut s'écrire sous la forme*

$$C^{(1)} = u^{-k} T_{i_1,\underline{l_1}} D_{i_1,u} \cdots T_{i_r,\underline{l_r}} D_{i_r,u}$$

  où $k \in \mathbb{N}$, $\underline{l_1}, ..., \underline{l_r} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ *et* $u = \frac{z-1}{z+1}$ *(*u *a une valuation en* 1 *qui vaut* 1*).*
- $R^{(1)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-1\}))$ *régulière en* 1.

Démonstration. On adapte la preuve de [Sau00, Section 1.3.1, Corollaire 1]. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k M_1 := M_1'$ ait des coefficients analytiques en 1. Soit $v_1(\det(M_1'))$ la valuation en 1 de $\det(M_1')$. Si $v_1(\det(M_1')) = 0$ alors M_1' est régulière en 1. On pose alors $R^{(1)} = M_1'$ et $C^{(1)} = u^{-k} I_n$. Si $v_1(\det(M_1')) > 0$, on fait une récurrence sur $v_1(\det(M_1'))$: on montre qu'il existe une matrice N_1' à coefficients analytiques en 1 telle que $M_1' = T_{i_1,\underline{l_1}} D_{i_1,u} N_1'$ avec

$$v_1(\det(N_1')) < v_1(\det(M_1')) .$$

Si $v_1(\det(M_1')) > 0$ alors $M_1'(1)$ n'est pas inversible et il existe $\underline{l} = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\underline{l} M_1'(1) = 0 \in \mathbb{C}^n. \tag{3.10}$$

Soit $i \in [|1,n|]$ tel que $l_i \neq 0$ alors les coefficients de $T_{i,\underline{l}} M_1'$ sont analytiques en 1 et, par l'égalité (3.10), ses coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne ont une valuation en 1 qui est plus grande ou égale à 1. Ainsi, les coefficients de la matrice

$$N_1' := D_{i,u}^{-1} T_{i,\underline{l}} M_1' = D_{i,u^{-1}} T_{i,\underline{l}} M_1'$$

sont analytiques en 1 et $v_1(\det(N_1')) = v_1(\det(M_1')) - 1$ car $\det(N_1') = \dfrac{l_i}{u} \det(M_1')$. □

D'après [Sau00, Section 1.3.1, Corollaire 2], on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.15. *Soient* $C^{(0)}, C^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$. *Il existe alors* $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ *tel que* $UC^{(0)}$ *est régulière en* 0 *et* $UC^{(\infty)}$ *est régulière en* ∞.

Proposition 3.3.16. *Si le système* $\phi_p(Y) = AY$ *est singulier régulier en* $0, 1$ *et* ∞ *alors il est rationnellement équivalent à un système fuchsien strict en* $0, 1$ *et* ∞ *c'est-à-dire qu'il existe* $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ *tel que le système*

$$\phi_p(Y) = BY \quad \text{avec} \quad B := \phi_p(R)^{-1} AR$$

est fuchsien strict en $0, 1$ *et* ∞.

Démonstration. Par les Corollaires 3.1.7, 3.1.12 et le Corollaire 3.1.20 (en utilisant ici le logarithme principal au lieu du logarithme $\widetilde{\ln}$), il existe $F_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\}))$ (respectivement $F_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-1\}))$, $F_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\right)$ et $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $A_1, A_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) tels que pour $i = 0, 1, \infty$,

$$\phi_p(F_i)^{-1} AF_i = A_i.$$

Si on montre qu'il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ tel que pour $i = 0, 1, \infty$, $K_i := R^{-1}F_i$ est régulière en i alors

$$B = \phi_p(R)^{-1}AR = \phi_p(K_i)\, A_i K_i^{-1}$$

sera bien régulière en $0, 1$ et ∞. D'après le Lemme 3.3.13, F_0 peut s'écrire sous la forme $C^{(0)}R^{(0)}$ où $C^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ et $R^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\}))$ est régulière en 0. De même, par le changement de variable $z \mapsto 1/z$, on peut écrire $F_\infty = C^{(\infty)}R^{(\infty)}$ où $C^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ et $R^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\right)$ est régulière en ∞. Par le Lemme 3.3.15, il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ tel que les matrices $UC^{(0)}$ et $UC^{(\infty)}$ sont respectivement régulières en 0 et ∞. La matrice UF_1 a des coefficients méromorphes en 1. Par le Lemme 3.3.14, UF_1 peut s'écrire $C^{(1)}R^{(1)}$ où $C^{(1)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ est régulière en $0, \infty$ et $R^{(1)}$ est régulière en 1. La matrice

$$R := U^{-1}C^{(1)}$$

convient. En effet, $K_1 = R^{-1}F_1 = R^{(1)}$ est régulière en 1 et $K_i = {C^{(1)}}^{-1}UC^{(i)}R^{(i)}$ est régulière en i pour $i = 0, \infty$. □

Théorème 3.3.17. *Les catégories $\mathcal{E}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{fs}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Comme $\mathcal{E}_{fs}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{sr}$, l'injection $\mathscr{E} : \mathcal{E}_{fs} \to \mathcal{E}_{sr}$ est un foncteur plein et fidèle. Par la Proposition 3.3.16, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ tel que

$$B := \phi_p(R)^{-1}AR \in \mathrm{Obj}(\mathcal{E}_{fs}).$$

Ainsi, A est isomorphe à $B = \mathscr{E}(B)$ et le foncteur $\mathscr{E}$ est aussi essentiellement surjectif. □

3.4 Les catégories locales et les groupoïdes locaux

3.4.1 Résultats préliminaires

Les morphismes entre systèmes constants

Lemme 3.4.1. *Soient $A_0 \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$ et $B_0 \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C})$. Si $T \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}((z)))$ vérifie $\phi_p(T)A_0 = B_0T$ alors $T \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. On écrit $T(z) = \sum\limits_{k\geq N} T_k z^k$ où $T_k \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$, $N = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid T_k \neq 0\}$. On a donc

$$\sum_{k\geq N} T_k A_0 z^{pk} = \sum_{k\geq N} B_0 T_k z^k. \tag{3.11}$$

L'égalité des plus bas degrés donne $pN = N$ soit $N = 0$ (car $p \neq 0$). Par l'égalité (3.11), tous les T_k tels que $p \nmid k$ sont nuls. Aussi, si $k \in \mathbb{N}^\star$ est tel que $p \mid k$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{k}{p^j} \in \mathbb{N}$ n'est pas divisible par p. Comme $B_0 T_k = T_{k/p} A_0$, on obtient que $T_k = B_0^{-j} T_{k/p^j} A_0^j = 0$ d'où $T(z) = T_0 \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$. $\square$

On obtient de même le résultat suivant.

Lemme 3.4.2. *Soient $A_\infty \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$ et $B_\infty \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C})$. Si $T \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right)$ est tel que $\phi_p(T) A_\infty = B_\infty T$ alors $T \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$.*

Lemme 3.4.3. *Soient $A_1 \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$, $B_1 \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C})$ et $\widetilde{S_1}$ une matrice de taille $n_2 \times n_1$ ayant des coefficients méromorphes en $\widetilde{1} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}$. Si $\phi_p\left(\widetilde{S_1}\right) A_1 = B_1 \widetilde{S_1}$ alors $\widetilde{S_1}$ a pour coefficients des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$.*

Démonstration. Soit $S_1 := \widetilde{S_1} \circ \widetilde{\ln}^{-1}$ alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, S_1(pz) A_1 = B_1 S_1(z).$$

Comme S_1 a des coefficients méromorphes en 0, d'après [Sau03, §2.1.3.2], les coefficients de S_1 sont des polynômes de Laurent. Ainsi, les coefficients de $\widetilde{S_1} = S_1 \circ \widetilde{\ln}$ sont des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$. $\square$

Notation 3.4.4. On note $\mathbb{C}\left[\widetilde{\ln}, \widetilde{\ln}^{-1}\right]$ l'anneau des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$.

Les représentations complexes de $\mathbb{Z}$ de dimension finie

Pour plus de détails, on pourra consulter [Sau99, Annexe A].

On remarque que se donner une représentation de $\mathbb{Z}$ revient à se donner un couple $(\mathbb{C}^n, A)$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image de $1 \in \mathbb{Z}$ par la représentation. Soit

$$\mathcal{R} := \mathcal{R}ep_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$$

la catégorie des représentations complexes de $\mathbb{Z}$ de dimension finie. Les objets sont donc les paires $(\mathbb{C}^n, A)$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Les morphismes $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ sont les $F \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ tels que $FA = BF$. C'est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ ayant pour foncteur fibre le foncteur oubli

$$\begin{array}{rccc} \omega : & \mathcal{R} & \to & \mathrm{Vect}^f(\mathbb{C}) \\ & (\mathbb{C}^n, A) & \rightsquigarrow & \mathbb{C}^n \\ & F & \rightsquigarrow & F\,. \end{array}$$

Son groupe de Galois est le groupe proalgébrique

$$\mathbb{Z}^{alg} := \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)\,.$$

Notation 3.4.5. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $A = A_s A_u$ sa décomposition de Dunford multiplicative. Soit $(\gamma, \lambda) \in \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}$. On note $A^{(\gamma,\lambda)} := \gamma(A_s) A_u^\lambda = A_u^\lambda \gamma(A_s)$ où

- γ agit sur les valeurs propres de A_s : si $A_s = Q.\mathrm{diag}(c_1, ..., c_n).Q^{-1}$ alors

$$\gamma\left(A_s\right) := Q.\mathrm{diag}\left(\gamma(c_1), ..., \gamma(c_n)\right).Q^{-1};$$

- $A_u^\lambda = \sum\limits_{k \geqslant 0} \binom{\lambda}{k} \left(A_u - I_n\right)^k$.

Comme $A^{(\gamma,\lambda)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$, elle définit un automorphisme de $\mathbb{C}^n = \omega\left(\left(\mathbb{C}^n, A\right)\right)$.

Proposition 3.4.6. *Il y a un isomorphisme de groupes proalgébriques*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star, \mathbb{C}^\star\right) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z}^{alg} \\ (\gamma, \lambda) & \longmapsto & \left(\left(\mathbb{C}^n, A\right) \mapsto A^{(\gamma,\lambda)}\right). \end{array}$$

3.4.2 Localisation en 0 et en ∞

Les catégories $\mathcal{E}_{sr}^{(0)}$ et $\mathcal{E}_{sr}^{(\infty)}$

On note $\mathcal{E}_{sr}^{(0)}$, respectivement $\mathcal{E}_{sr}^{(\infty)}$, la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{E}_{sr}$ mais dont les morphismes de A de rang n_1 dans B de rang n_2 sont les $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\left(\{z\}\right)\right)$, respectivement $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\left(\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\right)$, tels que $\phi_p(R)A = BR$. On déduit de cette équation vérifiée par R que

$$R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right), \quad \text{respectivement} \quad R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathcal{M}\left(P^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right).$$

Jusqu'à la fin de la section 3.4.2, on considère $i \in \{0, \infty\}$.

On note $\mathcal{P}^{(i)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{sr}^{(i)}$ dont les objets sont les $C \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$.

Lemme 3.4.7. *Si R est un morphisme de la catégorie $\mathcal{P}^{(i)}$ de $A_i \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(i)}\right)$, de rang n_1, dans $B_i \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(i)}\right)$, de rang n_2, alors $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\right)$.*

Démonstration. Comme $R \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}^{(i)}}\left(A_i, B_i\right)$ alors $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\left(\{z\}\right)\right)$ vérifie

$$\phi_p(R)A_i = B_iR.$$

D'après les Lemmes 3.4.1 et 3.4.2, $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\right)$. □

Il est immédiat que :

Proposition 3.4.8. *Les catégories $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}^{(i)}$ sont équivalentes.*

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.4.9. *La catégorie $\mathcal{P}^{(i)}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ et le foncteur*

$$\omega_{l,i}: \ \mathcal{P}^{(i)} \to \mathrm{Vect}^f\left(\mathbb{C}\right) \quad \begin{cases} A_i \rightsquigarrow \mathbb{C}^n & \textit{où } n \textit{ est le rang de } A_i \\ R \rightsquigarrow R \end{cases}$$

est un foncteur fibre pour $\mathcal{P}^{(i)}$.

Proposition 3.4.10. *L'injection*

$$\mathscr{F} : \mathcal{P}^{(i)} \to \mathcal{E}_{sr}^{(i)}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Le foncteur $\mathscr{F}$ est une équivalence de catégories car il est :

- essentiellement surjectif. Par les Corollaires 3.1.7 et 3.1.12, tout objet A de $\mathcal{E}_{sr}^{(i)}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{P}^{(i)}$.
- plein et fidèle. Ceci est clair par construction.

□

Corollaire 3.4.11. *Les catégories $\mathcal{E}_{sr}^{(i)}$ et $\mathcal{P}^{(i)}$ sont des catégories tannakiennes neutres sur $\mathbb{C}$.*

Groupoïde de Galois local en 0 et ∞

Définition 3.4.12. Le *groupoïde de Galois local en i*, noté G_i, est un groupoïde ayant un objet, le foncteur fibre $\omega_{l,i} : \mathcal{P}^{(i)} \to \mathrm{Vect}^f(\mathbb{C})$, et ses morphismes de $\omega_{l,i}$ dans $\omega_{l,i}$ sont les éléments de

$$G_i\left(\omega_{l,i}, \omega_{l,i}\right) := \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,i}\right).$$

Le *groupe de Galois local en i* est le groupe de Galois de $\mathcal{P}^{(i)}$ c'est-à-dire $G_i\left(\omega_{l,i}, \omega_{l,i}\right)$. On le note aussi G_i.

Dans la section précédente, on a vu que les catégories $\mathcal{E}_{sr}^{(i)}$, $\mathcal{P}^{(i)}$ et $\mathcal{R}$ sont des catégories tannakiennes neutres équivalentes. Ainsi, on a le résultat suivant.

Proposition 3.4.13. *Les catégories $\mathcal{E}_{sr}^{(i)}$, $\mathcal{P}^{(i)}$ et $\mathcal{R}$ ont le même groupe de Galois, c'est le groupe $\mathbb{Z}^{alg}$.*

Le groupe de Galois local en i est donc

$$G_i = \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,i}\right) = \mathbb{Z}^{alg}$$

et les morphismes du groupoïde de Galois local en i sont les éléments de $\mathbb{Z}^{alg}$.

3.4.3 Localisation en 1

La catégorie $\mathcal{E}_{sr}^{(1)}$

Notation 3.4.14. On note

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \times \left]-\pi, \pi\right[& \to & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \\ & (re^{it}, t) & \mapsto & re^{it}. \end{array}$$

On note $\mathcal{E}_{sr}^{(1)}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{E}_{sr}$ mais dont les morphismes de A, de rang n_1, dans B, de rang n_2, sont les $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}(\{z-1\}))$ tels que $\phi_p(R)A = BR$. On déduit de cette équation vérifiée par R que $R \circ \exp \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$. En effet, les coefficients de $R \circ \exp$ sont méromorphes en 0 et on a

$$(R \circ \exp)(pz) = B(\exp(z))\,(R \circ \exp)(z) A^{-1}(\exp(z))$$

où $A \circ \exp$ et $B \circ \exp$ ont pour coefficients des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{P}^{(1)}$ la catégorie dont les objets sont les $A_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et les morphismes de $A_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right)$ de rang n_1 dans $B_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right)$ de rang n_2 sont les matrices $\widetilde{R}$ de taille $n_2 \times n_1$ à coefficients méromorphes en $\widetilde{1} \in \widetilde{\mathbb{C}^{\star}}$ telles que

$$\phi_p\left(\widetilde{R}\right) A_1 = B_1 \widetilde{R}.$$

Lemme 3.4.15. *Si $\widetilde{R}$ est un morphisme de la catégorie $\mathcal{P}^{(1)}$ de $A_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right)$ de rang n_1 dans $B_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right)$ de rang n_2 alors les coefficients de $\widetilde{R}$ sont des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$.*

Démonstration. Puisque $\widetilde{R} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}^{(1)}}(A_1, B_1)$ alors $\phi_p\left(\widetilde{R}\right) A_1 = B_1 \widetilde{R}$ et on conclut grâce au Lemme 3.4.3. □

Proposition 3.4.16. *Les catégories $\mathcal{E}_{sr}^{(1)}$ et $\mathcal{P}^{(1)}$ sont équivalentes par le foncteur*

$$\mathscr{G} : \mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{E}_{sr}^{(1)}$$

qui associe à un objet A_1 de $\mathcal{P}^{(1)}$ l'objet A_1 de $\mathcal{E}_{sr}^{(1)}$ et qui associe au morphisme $\widetilde{R}$ de $\mathcal{P}^{(1)}$ le morphisme $\widetilde{R} \circ \pi_1^{-1}$ de $\mathcal{E}_{sr}^{(1)}$.

Démonstration. Le foncteur $\mathscr{G}$ est une équivalence de catégories car il est :

- essentiellement surjectif. Par le Corollaire 3.1.20, on déduit que tout objet A de $\mathcal{E}_{sr}^{(1)}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{P}^{(1)}$.
- plein et fidèle. Ceci est clair par construction.

□

Proposition 3.4.17. *L'inclusion $\mathscr{F} : \mathcal{R} \to \mathcal{P}^{(1)}$ est un foncteur qui préserve le produit tensoriel : pour $(\mathbb{C}^n, A_1), (\mathbb{C}^{n_2}, B_1) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{R})$,*

$$\mathscr{F}\left((\mathbb{C}^n, A_1) \otimes (\mathbb{C}^{n_2}, B_1)\right) = (\mathbb{C}^n, A_1) \otimes (\mathbb{C}^{n_2}, B_1) = \mathscr{F}((\mathbb{C}^n, A_1)) \otimes \mathscr{F}((\mathbb{C}^{n_2}, B_1),$$

de même pour les morphismes. Il est exact, essentiellement surjectif et fidèle. Mais, il n'est pas plein.

Démonstration. Ceci est clair car $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}^{(1)}$ ont les mêmes objets mais $\mathcal{R}$ n'a que les morphismes constants et il existe des morphismes de $\mathcal{P}^{(1)}$ qui ne sont pas constants, par exemple $\widetilde{\ln} : (\mathbb{C}, 1) \to (\mathbb{C}, p)$. □

Remarque 3.4.18. Un isomorphisme de catégories entre $\mathcal{P}^{(1)}$ et la catégorie $\mathscr{P}^{(0)}$ introduite en [Sau03, Section 2.1.2] est obtenu en composant par $\widetilde{\ln}$:

$$\mathscr{P}^{(0)} \to \mathcal{P}^{(1)}$$
$$\begin{cases} A_1 \rightsquigarrow A_1 \\ H \rightsquigarrow H \circ \widetilde{\ln}. \end{cases}$$

Proposition 3.4.19. *La catégorie $\mathcal{P}^{(1)}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $\widetilde{c} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$,*

$$\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})} : \quad \mathcal{P}^{(1)} \to \mathrm{Vect}^f(\mathbb{C})$$
$$\begin{cases} A_1 \rightsquigarrow \mathbb{C}^n & \textit{où } n \textit{ le rang de } A_1 \\ \widetilde{R} \rightsquigarrow \widetilde{R}(\widetilde{c}) \end{cases}$$

est un foncteur fibre.

Démonstration. Suite à la Remarque 3.4.18, cette proposition découle de [Sau03, §2.1.3.3].

Montrons-la aussi « à la main ». Seule la fidélité n'est pas immédiate. Montrons donc que ces foncteurs sont fidèles. Si $\widetilde{R}(\widetilde{c}) = 0$, de l'égalité $\widetilde{R}(\widetilde{z}^p)\, A_1 = B_1 \widetilde{R}(\widetilde{z})$ on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{R}\left(\widetilde{c}^{p^k}\right) = 0$. Puisque $\widetilde{R}$ a pour coefficients des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$ ayant une infinité de zéros, il est nul. □

Groupoïde de Galois local en 1

Suite à la Remarque 3.4.18, d'après [Sau03, Section 2.2], on obtient les résultats de cette section.

Définition 3.4.20. Le *groupoïde de Galois local en* 1, noté G_1, est un groupoïde tel que ses objets sont les

$$\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \quad \widetilde{c} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$$

et ses morphismes sont les éléments de

$$G_1\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{d})}\right) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{d})}\right).$$

Tout foncteur fibre $\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}$ défini en Proposition 3.4.19 se restreint en le foncteur oubli ω sur $\mathcal{R}$. Ainsi, $\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}\right)$ est un sous-groupe (et $\mathrm{Iso}^{\otimes}\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{d})}\right)$ un sous-ensemble) de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) = \mathbb{Z}^{alg}$.

Théorème 3.4.21. *Avec l'identification entre $\mathbb{Z}^{alg}$ et $\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{C}^\star, \mathbb{C}^\star) \times \mathbb{C}$ donnée en Proposition 3.4.6, pour tous $\widetilde{c}, \widetilde{d} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$,*

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{d})}\right) = \left\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg} \mid \gamma(p)\widetilde{\ln}(\widetilde{c}) = \widetilde{\ln}\left(\widetilde{d}\right)\right\}.$$

Démonstration. On utilise les notations de la Remarque 3.4.18. La catégorie $\mathscr{P}^{(0)}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ ayant des foncteurs fibres notés $\omega_{z_0}^{(0)}$, $z_0 \in \mathbb{C}^\star$ (voir [Sau03, Proposition 2.1.3.3]). Puisque, par construction, $\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}\left(H \circ \widetilde{\ln}\right) = \omega_{\widetilde{\ln}(\widetilde{c})}^{(0)}(H)$, ce résultat découle de [Sau03, Theorem 2.2.2.1]. □

Le groupoïde de Galois local en 1 est un groupoïde transitif puisqu'il existe un morphisme entre chacun de ses objets, on peut donc prendre comme groupe de Galois local en 1 un groupe $G_1\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}\right)$ pour un certain $\widetilde{c} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$.

Corollaire 3.4.22. *Avec la même identification, pour $\widetilde{c} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$, le groupe de Galois local en 1 est*

$$G_1 := G_1\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}\right) = \left\{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg} \mid \gamma(p) = 1\right\}.$$

Ainsi,

$$G_1\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right) \times \mathbb{C} := G_{1,s} \times G_{1,u}.$$

On remarque que le groupe de Galois local G_1 obtenu est égal au groupe introduit par Sauloy dans [Sau03, §2.2.2.2]. D'après [Sau03, Section 2.2.3], on connaît donc un sous-groupe Zariski-dense de G_1 que l'on rappelle ci-dessous.

Lemme 3.4.23 (éléments de la composante unipotente $G_{1,u}$)**.** *Soit $A_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right)$. On note $A_1 = A_{1,u}A_{1,s}$ sa décomposition de Dunford en une partie unipotente et semi-simple. L'élément $1 \in \mathbb{C}$ qui correspond à $A_1 \rightsquigarrow A_{1,u} \in \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}\right)$ engendre un sous-groupe Zariski-dense de la composante unipotente $G_{1,u}$.*

Notation 3.4.24. On rappelle que $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Tout élément $z \in \mathbb{C}^\star$ peut s'écrire de la forme $z = up^x$ où $u \in \mathscr{C}(0,1)$ et $x \in \mathbb{R}$. Cette écriture est de plus unique. On note alors

$$\begin{array}{cccc} \gamma_1 : & \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C}^\star \\ & up^x & \mapsto & u \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \gamma_2 : & \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C}^\star \\ & up^x & \mapsto & e^{2i\pi x} \end{array}.$$

Lemme 3.4.25 (éléments de la composante semi-simple $G_{1,s}$)**.** *On note*

$$\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2} \in \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right)$$

les morphismes induits respectivement par γ_1 et γ_2. Ils engendrent un sous-groupe Zariski-dense de la composante semi-simple $G_{1,s}$.

Théorème 3.4.26. *Le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right) \times \mathbb{C}$ dont la composante unipotente est $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ et dont la composante semi-simple est engendrée par $\overline{\gamma_1}$ et $\overline{\gamma_2}$ est Zariski-dense dans le groupe de Galois local en 1.*

On peut aussi montrer ces résultats « à la main ».

Démonstration du Théorème 3.4.21. Avec l'identification donnée en Proposition 3.4.6, soit $(\gamma, \lambda) \in \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{C}^\star, \mathbb{C}^\star) \times \mathbb{C}$ un élément de $\mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}, \omega_{l,1}^{(\widetilde{d})}\right)$. On considère le morphisme de $\mathcal{P}^{(1)}$,

$$\widetilde{\ln} : 1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right) \to p \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right).$$

La condition sur (γ, λ) d'être une transformation naturelle donne $\widetilde{\ln}\left(\widetilde{d}\right)\gamma(1) = \gamma(p)\widetilde{\ln}\left(\widetilde{c}\right)$ soit

$$\widetilde{\ln}\left(\widetilde{d}\right) = \gamma(p)\widetilde{\ln}\left(\widetilde{c}\right).$$

Réciproquement, supposons que $(\gamma, \lambda) \in \mathbf{Z}^{alg}$ est tel que $d = \gamma(p)c$ où l'on pose $c = \widetilde{\ln}\left(\widetilde{c}\right)$ et $d = \widetilde{\ln}\left(\widetilde{d}\right)$. Montrons que $(\gamma, \lambda) \in \mathbf{Z}^{alg}$ est compatible avec tous les morphismes $\widetilde{R} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}^{(1)}}(A_1, B_1)$ avec A_1 et B_1 de rang n_1 et n_2 respectivement. Par hypothèse,

$$\phi_p\left(\widetilde{R}\right)A_1 = B_1\widetilde{R} \tag{3.12}$$

et $\widetilde{R}$ a pour coefficients des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$. On peut donc en particulier écrire $\widetilde{R} = \sum\limits_{k=k_0}^{+\infty} R_k \widetilde{\ln}^k$ où $R_k \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$ et l'égalité (3.12) donne

$$\forall k \geq k_0, \quad R_k p^k A_1 = B_1 R_k$$

donc $R_k : p^k A_1 \to B_1$ est un morphisme de $\mathcal{R}$. Par la condition de transformation naturelle, on a donc

$$R_k\left(p^k A_1\right)^{(\gamma,\lambda)} = B_1^{(\gamma,\lambda)} R_k.$$

Comme $\left(p^k A_1\right)^{(\gamma,\lambda)} = \gamma(p)^k A_1^{(\gamma,\lambda)}$, cela implique que $R_k\left(\gamma(p)c\right)^k A_1^{(\gamma,\lambda)} = B_1^{(\gamma,\lambda)} R_k c^k$. Ainsi, en sommant sur k, on obtient

$$\widetilde{R}\left(\widetilde{d}\right) A_1^{(\gamma,\lambda)} = B_1^{(\gamma,\lambda)} \widetilde{R}\left(\widetilde{c}\right).$$

La condition de $\otimes$-compatibilité est vérifiée puisque si $A_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right) = \mathrm{Obj}(\mathcal{R})$ alors $\omega(A_1) = \omega_{l,1}^{(\widetilde{z})}(A_1)$ pour tout $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}$ et $(\gamma, \lambda) \in \mathbf{Z}^{alg} = \mathrm{Aut}^\otimes(w)$. □

Démonstration du Lemme 3.4.23. On utilise le critère de densité donné par le Théorème 3.2.35. Soit $D \subset \omega_{l,1}^{(\widetilde{c})}(A_{1,u}) = \mathbb{C}^n$ une droite stable par $A_{1,u}$. Il faut montrer qu'elle est stable par $A_{1,u}^\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Par définition,

$$A_{1,u}^\lambda = \sum_{k\geqslant 0} \binom{\lambda}{k} (A_{1,u} - I_n)^k = I_n + \sum_{k\geqslant 1} \binom{\lambda}{k} (A_{1,u} - I_n)^k.$$

Or $(A_{1,u} - I_n) D = 0$ donc pour tout $k \geq 1$, $(A_{1,u} - I_n)^k D = 0$ et cela implique que

$$A_{1,u}^\lambda D = D.$$

□

Démonstration du Lemme 3.4.25. On utilise à nouveau le critère de densité donné par le Théorème 3.2.35. Soit $D \subset \omega_{l,1}^{(\overline{c})}(A_{1,s}) = \mathbb{C}^n$ une droite stable par $\overline{\gamma_1}(A_{1,s})$ et $\overline{\gamma_2}(A_{1,s})$. Il faut montrer qu'elle est stable par $\overline{\gamma}(A_{1,s})$ pour tout $\overline{\gamma} \in \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right)$. Soit $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x) = D$. On peut supposer que $A_{1,s} = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$. Pour $i = 1, 2$, on a donc que

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{C}^\star, \quad \mathrm{diag}\left(\overline{\gamma_i}(\overline{c_1}), ..., \overline{\gamma_i}(\overline{c_n})\right){}^t(x_1, ..., x_n) = \alpha_i{}^t(x_1, ..., x_n). \tag{3.13}$$

Si il n'y a qu'un seul des x_i qui est non nul alors D est clairement fixée par tous les $\overline{\gamma}(A_{1,s})$. Montrons que ceci reste vrai si il y a au moins deux coefficients de x non nuls. Pour tous les $k, l \in \{1, ..., n\}$ tels que $x_k x_l \neq 0$, l'égalité (3.13) implique que

$$\overline{\gamma_i}(\overline{c_k}) = \alpha_i = \overline{\gamma_i}(\overline{c_l})$$

pour $i = 1, 2$. Ainsi, $\dfrac{\overline{c_k}}{\overline{c_l}} \in \mathrm{Ker}(\overline{\gamma_1}) \cap \mathrm{Ker}(\overline{\gamma_2}) = \{\overline{1}\}$ soit $\overline{c_k} = \overline{c_l}$ ce qui conclut puisque pour tout $\overline{\gamma} \in \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right)$ on a donc $\overline{\gamma}(\overline{c_k}) = \overline{\gamma}(\overline{c_l})$. □

Démonstration du Théorème 3.4.26. On utilise encore le critère de densité donné par le Théorème 3.2.35. Soit $D \subset \omega_{l,1}^{(\overline{c})}(A_1) = \mathbb{C}^n$ une droite stable par tous les éléments du sous-groupe donné dans le théorème. Il faut montrer qu'elle est aussi stable par $A_1 \rightsquigarrow A_1^{(\overline{\gamma},\lambda)}$ pour tout $(\overline{\gamma}, \lambda) \in \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right) \times \mathbb{C}$. En particulier, pour $(\overline{\gamma_1}, 0)$ et $(\overline{\gamma_2}, 0)$, le Lemme 3.4.25 donne que $\overline{\gamma}(A_{1,s}) D = D$ pour tout $\overline{\gamma} \in \mathrm{Hom}_{gr}\left(\mathbb{C}^\star/p^{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\star\right)$. Par le Lemme 3.4.23, on obtient aussi que $A_{1,u}^{\lambda} D = D$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ ainsi $A_1^{(\overline{\gamma},\lambda)} D = D$, ce qui conclut. □

3.5 Les catégories globales

3.5.1 La catégorie des systèmes de Mahler singuliers réguliers est tannakienne

On va montrer que la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$. Ainsi, on déduit de l'équivalence donnée au Théorème 3.3.17 que $\mathcal{E}_{fs}$ est aussi une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.

Lemme 3.5.1. *Tout morphisme de la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ a un noyau.*

Démonstration. On rappelle que les catégories $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{(0)}$ (introduites dans la Section 3.3.3) et $\mathcal{E}_{sr}^{(0)}$ (introduite dans la Section 3.4.2) sont des catégories tannakiennes. On considère les injections suivantes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{sr} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{E}_{sr}^{(0)} \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^{(0)} \end{tikzcd}.$$

Soit $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}(z))$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ de $A \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C}(z))$ dans $B \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C}(z))$. Le morphisme R a un noyau dans la catégorie tannakienne $\mathcal{E}$, on le note

$$(C, K : C \to A). \tag{3.14}$$

Afin de montrer que ce noyau est aussi un noyau de R dans la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$, il suffit de montrer que le système $\phi_p(Y) = CY$ est singulier régulier en 0, 1 et ∞. Le morphisme R a aussi un noyau dans la catégorie tannakienne $\mathcal{E}_{sr}^{(0)}$, on le note

$$(C_0, K_0 : C_0 \to A) \tag{3.15}$$

Le système $\phi_p(Y) = C_0 Y$ est donc singulier régulier en 0. Les noyaux (3.14) et (3.15) sont des noyaux du morphisme R dans la catégorie $\mathcal{E}^{(0)}$, ils sont donc isomorphes c'est-à-dire qu'il existe un morphisme inversible $u_1 : C_0 \to C$ dans la catégorie $\mathcal{E}^{(0)}$ tel que $Ku_1 = K$. Étant donné que $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{(0)}}(C_0, C)$, les coefficients de u_1 sont des fonctions méromorphes en 0 et u_1 satisfait

$$\phi_p(u_1)\, C_0 = C u_1.$$

Ainsi, le système $\phi_p(Y) = CY$ est aussi singulier régulier en 0. De même, on peut montrer que le système $\phi_p(Y) = CY$ est singulier régulier en 1 et en ∞ donc $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{E}_{sr})$ et $(C, K : C \to A)$ est aussi un noyau de R dans la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$. □

Proposition 3.5.2. *La catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. D'après la Section 3.3.3, $\mathcal{E}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$. La catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ est une sous-catégorie tensorielle rigide de $\mathcal{E}$ parce qu'elle est laissée stable par les opérations tensorielles, elle contient un objet identité, $\mathbf{1} = 1 \in \mathbb{C}^\star$, les Hom internes et chaque objet a un dual. Pour montrer que c'est une sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{E}$, il reste à montrer l'existence des noyaux et des conoyaux dans $\mathcal{E}_{sr}$. Le Lemme 3.5.1 et le fait que la dualité échange les noyaux et les conoyaux permettent de conclure. □

On introduit dans la Section 3.5.2 et la Section 3.5.3 la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$ des connexions et la catégorie $\mathcal{S}_{sr}$ des solutions respectivement. On veut montrer que $\mathcal{C}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$ sont équivalentes. La catégorie $\mathcal{S}_{sr}$ joue seulement un rôle intermédiaire. Plus précisément, on va montrer que $\mathcal{C}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$ sont équivalentes via deux foncteurs, qui sont des équivalences de catégories, de $\mathcal{S}_{sr}$ dans respectivement $\mathcal{C}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$. Grâce à $\mathcal{S}_{sr}$, on a des foncteurs bien définis qui sont indépendants de tous les choix (choix d'une solution d'un système, choix d'une décomposition des matrices de connexion).

3.5.2 Catégorie $\mathcal{C}_{sr}$ des connexions

On rappelle les notations suivantes introduites dans la Section 2.1 :

$$\Sigma_0 := \left\{ \left(re^{ib}, b\right) \mid 0 < r < 1, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^\star}$$

et

$$\Sigma_\infty := \left\{ \left(re^{ib}, b\right) \mid r > 1, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^\star}.$$

On note $\mathcal{C}_{sr}$ la catégorie des connexions. Ses objets sont les

$$\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^3 \times \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\Sigma_0\right)\right) \times \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\Sigma_\infty\right)\right)$$

tels que

$$\begin{cases} \phi_p\left(\widetilde{M_0}\right) = A_1\widetilde{M_0}A_0^{-1} \\ \phi_p\left(\widetilde{M_\infty}\right) = A_1\widetilde{M_\infty}A_\infty^{-1} \end{cases}$$

et tels que il existe

$$\widetilde{W_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right),\ W_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right),\ W_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)\setminus\overline{D}\right)\right)$$

tels que

$$\begin{cases} \widetilde{W_1}\widetilde{M_0} = \pi^\star W_0 \\ \widetilde{W_1}\widetilde{M_\infty} = \pi^\star W_\infty\,. \end{cases}$$

L'entier n est appelé le *rang* de l'objet.

Les morphismes de $(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty})$ dans $(B_0, B_1, B_\infty, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty})$ de rang respectif n_1 et n_2 sont les triplets

$$\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right) \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\left[\widetilde{\ln}, \widetilde{\ln}^{-1}\right]\right) \times \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$$

tels que

$$\begin{cases} S_0A_0 = B_0S_0 \\ \phi_p\left(\widetilde{S_1}\right)A_1 = B_1\widetilde{S_1} \\ S_\infty A_\infty = B_\infty S_\infty \\ \widetilde{S_1}\widetilde{M_0} = \widetilde{N_0}S_0 \\ \widetilde{S_1}\widetilde{M_\infty} = \widetilde{N_\infty}S_\infty\,. \end{cases}$$

Remarque 3.5.3. Par les Lemmes 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3, un triplet $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right)$ est un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$ si et seulement si il satisfait le système ci-dessus et que les coefficients de S_0, $\widetilde{S_1}$ et S_∞ sont méromorphes en 0, $\widetilde{1}$ et ∞ respectivement.

3.5.3 Catégorie $\mathcal{S}_{sr}$ des solutions

On note $\mathcal{S}_{sr}$ la catégorie des solutions. Ses objets sont les $(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty)$ tels que

$$A_0, A_1, A_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

$$F_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right),$$

$$\widetilde{F_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right),$$

$$F_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)\setminus\overline{D}\right)\right)$$

et tels que si on pose

$$A := \begin{cases} \phi_p(F_0)A_0F_0^{-1} & \text{sur} \quad D \\ \phi_p(F_\infty)A_\infty F_\infty^{-1} & \text{sur} \quad \mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)\setminus\overline{D} \end{cases}$$

et $\widetilde{A} := \phi_p(\widetilde{F_1})A_1\widetilde{F_1}^{-1}$ sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ alors

$$\pi^\star A = \widetilde{A}.$$

L'entier n est appelé le *rang* de l'objet.

Les morphismes de $(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty)$ dans $(B_0, B_1, B_\infty, G_0, \widetilde{G_1}, G_\infty)$, deux objets de $\mathcal{S}_{sr}$ de rang respectif n_1 et n_2, sont les

$$(R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty) \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}(z)) \times \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n_2,n_1}\left(\mathbb{C}\left[\widetilde{\ln}, \widetilde{\ln}^{-1}\right]\right) \times \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$$

tels que

$$\begin{cases} S_0A_0 = B_0S_0 \\ \phi_p\left(\widetilde{S}_1\right)A_1 = B_1\widetilde{S}_1 \\ S_\infty A_\infty = B_\infty S_\infty \\ RF_i = G_iS_i \quad \text{pour} \quad i = 0, \infty \\ \widetilde{R}\widetilde{F_1} = \widetilde{G_1}\widetilde{S}_1 \end{cases}$$

où l'on a noté $\widetilde{R} = \pi^\star R$.

3.5.4 Les équivalences de catégories

Notre but est d'obtenir une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$.

Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$ sont équivalentes

Proposition 3.5.4. *Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$ sont équivalentes par le foncteur*

$$\mathscr{F}: \quad \mathcal{S}_{sr} \to \mathcal{E}_{sr}$$
$$\begin{cases} (A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty) \rightsquigarrow A \quad \textit{définie dans la catégorie } \mathcal{S}_{sr} \textit{ (Section 3.5.3)} \\ \left(R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) \rightsquigarrow R. \end{cases}$$

Démonstration. On commence par vérifier que ce foncteur est bien défini pour les objets. Par les égalités $A = \phi_p(F_0)A_0F_0^{-1}$, $A = \phi_p(F_\infty)A_\infty F_\infty^{-1}$ et $\pi^\star A = \phi_p\left(\widetilde{F_1}\right)A_1\widetilde{F_1}^{-1}$, on obtient que les coefficients de $\pi^\star A$ appartiennent à $\pi^\star\mathcal{M}(D)$, $\pi^\star\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)$ et $\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ respectivement. Par le Lemme 2.1.3, $\pi^\star A \in \mathrm{GL}_n(\pi^\star\mathbb{C}(z))$ donc

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z)).$$

De plus, le système $\phi_p(Y) = AY$ est singulier régulier en $0, 1, \infty$ donc A est bien un objet de la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$. Montrons maintenant qu'il est bien défini pour les morphismes. Par définition, $R \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C}(z))$ et vérifie

$$\phi_p(R)A = \underbrace{\phi_p(R)\phi_p(F_0)}_{=\phi_p(G_0)S_0}A_0F_0^{-1} = \phi_p(G_0)B_0\underbrace{S_0F_0^{-1}}_{=G_0^{-1}R} = BR,$$

la deuxième égalité découlant de l'égalité $S_0A_0 = B_0S_0$. Ainsi, R est bien un morphisme de $\mathcal{E}_{sr}$ de A dans B.

Le foncteur $\mathscr{F}$ est une équivalence de catégories car il est :

- essentiellement surjectif. Tout objet A de $\mathcal{E}_{sr}$ est isomorphe à un objet de la forme $\mathscr{F}(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty)$. Ici on a même l'existence d'un objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{S}_{sr}$ tel que $\mathscr{F}(\mathcal{X}) = A$ par les Corollaires 3.1.7, 3.1.12 et 3.1.20.
- plein et fidèle. Soit $R \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B)$, il existe un unique morphisme $(R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty)$ de la catégorie $\mathcal{S}_{sr}$ tel que $\mathscr{F}(R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty) = R$. En effet, avec les notations introduites dans la Section 3.5.3, on pose pour $i = 0, \infty$, $S_i = G_i^{-1} R F_i$ (uniquement déterminé) et $\widetilde{S}_1 = \widetilde{G_1}^{-1} \widetilde{R} \widetilde{F_1}$. On montre que $(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty)$ vérifie :
  - Pour $i = 0, \infty$,
  $$\phi_p(S_i) A_i = \phi_p(G_i)^{-1} \phi_p(R) \phi_p(F_i) A_i = B_i G_i^{-1} \underbrace{B^{-1} \phi_p(R) A}_{=R} F_i = B_i S_i$$
  où on a utilisé que $\phi_p(G_i) = B G_i B_i^{-1}$ et $\phi_p(F_i) = A F_i A_i^{-1}$ pour la seconde égalité. Par le Lemme 3.4.1, S_i est donc à coefficients constants.
  - De même, $\phi_p\left(\widetilde{S}_1\right) A_1 = B_1 \widetilde{S}_1$. Aussi, par le Lemme 3.4.3, $\widetilde{S}_1$ a pour coefficients des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$.

□

Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont équivalentes

Proposition 3.5.5. *Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont équivalentes par le foncteur*

$$\mathscr{G} : \quad \mathcal{S}_{sr} \to \mathcal{C}_{sr}$$
$$\begin{cases} \left(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty\right) \rightsquigarrow \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{F_1}^{-1} \pi^\star F_0, \widetilde{F_1}^{-1} \pi^\star F_\infty\right) \\ \left(R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) \rightsquigarrow \left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right). \end{cases}$$

Démonstration. On note $\widetilde{F}_i = \pi^\star F_i$ pour $i = 0, \infty$ et $\widetilde{R} = \pi^\star R$. Le foncteur $\mathscr{G}$ est bien défini pour les objets puisque en posant $\widetilde{W_1} := \widetilde{F_1}$, $W_0 := F_0$, $W_\infty := F_\infty$ (notations introduites pour la catégorie des connexions, Section 3.5.2), la matrice $\widetilde{W_1}$ vérifie les conditions requises. Montrons qu'il est bien défini pour les morphismes. Soit $(R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty)$ un morphisme de $\mathcal{S}_{sr}$ de $(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty)$ dans $(B_0, B_1, B_\infty, G_0, \widetilde{G_1}, G_\infty)$. Pour $i = 0, \infty$, en notant $\widetilde{M_i} = \widetilde{F_1}^{-1} \widetilde{F}_i$ et $\widetilde{N_i} = \widetilde{G_1}^{-1} \widetilde{G_i}$,

$$\widetilde{S}_1 \widetilde{M_i} = \underbrace{\widetilde{S}_1 \widetilde{F_1}^{-1}}_{=\widetilde{G_1}^{-1} \widetilde{R}} \widetilde{F}_i = \widetilde{N_i} S_i$$

donc $(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty)$ est bien un morphisme de $\mathcal{C}_{sr}$. Le foncteur $\mathscr{G}$ est une équivalence de catégories car il est :

- essentiellement surjectif. Tout objet $(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty})$ de $\mathcal{C}_{sr}$ est ici de la forme $\mathscr{G}(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty)$. En effet, avec $\widetilde{F_1} := \widetilde{W_1}$, $F_0 := W_0$ et $F_\infty := W_\infty$, on pose
$$A := \begin{cases} \phi_p(F_0) A_0 F_0^{-1} & \text{sur} \quad D \\ \phi_p(F_\infty) A_\infty F_\infty^{-1} & \text{sur} \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D} \end{cases}$$

et $\widetilde{A} := \phi_p(\widetilde{F_1})A_1\widetilde{F_1}^{-1}$ sur $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$. Les égalités

$$\phi_p\left(\widetilde{M_0}\right)A_0\widetilde{M_0}^{-1} = A_1 \text{ et } \phi_p\left(\widetilde{M_\infty}\right)A_\infty\widetilde{M_\infty}^{-1} = A_1$$

sont équivalentes à

$$\phi_p\left(\pi^\star F_0\right)A_0\pi^\star F_0 = \widetilde{A} \text{ et } \phi_p\left(\pi^\star F_\infty\right)A_\infty\pi^\star F_\infty = \widetilde{A}.$$

Ainsi, $\pi^\star A = \widetilde{A}$.

- plein et fidèle. Soit

$$(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{sr}}\left((A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}), (B_0, B_1, B_\infty, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty})\right),$$

il existe un unique $\mathcal{X} := (R, S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty) \in \mathrm{Hom}\left(\mathcal{S}_{sr}\right)$ tel que $\mathscr{G}(\mathcal{X}) = (S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty)$. En effet, pour $i = 0, \infty$, on a les égalités $\widetilde{G_1}\widetilde{S}_1\widetilde{F_1}^{-1} = \widetilde{G_i}S_i\widetilde{F_i}^{-1}$ puisque cela équivaut à $\widetilde{S}_1\widetilde{M_i} = \widetilde{N_i}S_i$. On peut donc poser $R := G_iS_iF_i^{-1}$ pour $i = 0, \infty$ et

$$\pi^\star R = \widetilde{G_i}S_i\widetilde{F_i}^{-1} = \widetilde{G_1}\widetilde{S}_1\widetilde{F_1}^{-1}.$$

Ainsi, les coefficients de $\pi^\star R$ appartiennent à

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right) \cap \pi^\star\mathcal{M}\left(D\right) \cap \pi^\star\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right).$$

Par le Lemme 2.1.3, $\pi^\star R$ a des coefficients dans $\pi^\star\mathbb{C}(z)$ soit R a pour coefficients des fonctions rationnelles.

□

Par les deux propositions précédentes, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.5.6. *Les catégories $\mathcal{C}_{sr}$ et $\mathcal{E}_{sr}$ sont équivalentes.*

3.5.5 Les catégories globales sont tannakiennes

On a vu dans la Section 3.5.1 que la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$ est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{C}$. On va montrer que les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ le sont aussi.

Les catégories sont abéliennes

Proposition 3.5.7. *Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont des catégories abéliennes.*

Démonstration. Les catégories $\mathcal{E}_{sr}$, $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont équivalentes (résultats de la Section 3.5.4) et $\mathcal{E}_{sr}$ est une catégorie abélienne donc d'après la Proposition A.1.9, $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont aussi des catégories abéliennes. □

Les structures tensorielles

On rappelle que l'on utilise le produit tensoriel usuel sur les matrices, introduit dans la Section 3.3.1. Ce produit tensoriel permet de définir une structure tensorielle sur chacune des catégories composante par composante. Plus précisément, on munit la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$ d'une structure tensorielle de la façon suivante : si $(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty})$ et $(B_0, B_1, B_\infty, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty})$ sont deux objets de $\mathcal{C}_{sr}$, on définit

$$(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}) \otimes (B_0, B_1, B_\infty, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty}) \\ = (A_0 \otimes B_0, A_1 \otimes B_1, A_\infty \otimes B_\infty, \widetilde{M_0} \otimes \widetilde{N_0}, \widetilde{M_\infty} \otimes \widetilde{N_\infty})$$

et si $(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty)$ et $(T_0, \widetilde{T_1}, T_\infty)$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}_{sr}$, on définit

$$(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty) \otimes (T_0, \widetilde{T_1}, T_\infty) = (S_0 \otimes T_0, \widetilde{S_1} \otimes \widetilde{T_1}, S_\infty \otimes T_\infty).$$

De même, on munit la catégorie $\mathcal{S}_{sr}$ d'une structure tensorielle de la façon suivante : si $(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty)$ et $(B_0, B_1, B_\infty, G_0, \widetilde{G_1}, G_\infty)$ sont deux objets de $\mathcal{S}_{sr}$, on définit

$$(A_0, A_1, A_\infty, F_0, \widetilde{F_1}, F_\infty) \otimes (B_0, B_1, B_\infty, G_0, \widetilde{G_1}, G_\infty) \\ = (A_0 \otimes B_0, A_1 \otimes B_1, A_\infty \otimes B_\infty, F_0 \otimes G_0, \widetilde{F_1} \otimes \widetilde{G_1}, F_\infty \otimes G_\infty)$$

et si $(R, S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty)$ et $(U, T_0, \widetilde{T_1}, T_\infty)$ sont deux morphismes de $\mathcal{S}_{sr}$, on définit

$$(R, S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty) \otimes (U, T_0, \widetilde{T_1}, T_\infty) = (R \otimes U, S_0 \otimes T_0, \widetilde{S_1} \otimes \widetilde{T_1}, S_\infty \otimes T_\infty).$$

Proposition 3.5.8. *Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont des catégories tensorielles rigides.*

Démonstration. Les catégories $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont tensorielles avec le produit tensoriel défini ci-dessus. Les catégories $\mathcal{E}_{sr}$, $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont équivalentes (voir Section 3.5.4) et $\mathcal{E}_{sr}$ est une catégorie tensorielle rigide donc d'après la Proposition A.2.6, $\mathcal{S}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ sont aussi des catégories tensorielles rigides. □

Les catégories sont tannakiennes

Dans la proposition ci-dessous, on explicite des foncteurs fibres pour la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$.

Proposition 3.5.9. *Pour tout $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$, on considère les foncteurs*

$$\omega_0, \omega_\infty, \omega_1^{(\widetilde{a})} : \mathcal{C}_{sr} \to \mathrm{Vect}^f(\mathbb{C})$$

définis de la façon suivante :

- *si $\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{sr})$ est de rang n alors pour $i = 0, \infty$,*

$$\omega_i(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^n \quad et \quad \omega_1^{(\widetilde{a})}(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^n,$$

- *si* $\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) \in \operatorname{Hom}\left(\mathcal{C}_{sr}\right)$ *alors pour* $i = 0, \infty$,

$$\omega_i\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) = S_i \quad \textit{et} \quad \omega_1^{(\widetilde{a})}\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) = \widetilde{S}_1\left(\widetilde{a}\right).$$

Ce sont des foncteurs fibres. La catégorie des connexions $\mathcal{C}_{sr}$ *munie de ces foncteurs fibres* $\omega_0, \omega_\infty, \omega_1^{(\widetilde{a})}$ *est une catégorie tannakienne neutre sur* $\mathbb{C}$.

Démonstration. La catégorie $\mathcal{C}_{sr}$ est une catégorie tensorielle abélienne rigide d'après les Propositions 3.5.7 et 3.5.8. De plus, l'objet $\mathbf{1} := (1,1,1,1,1)$ de $\mathcal{C}_{sr}$ est un objet identité et on peut vérifier que $\operatorname{Hom}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \{(s,s,s), s \in \mathbb{C}\}$ donc $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Il reste à montrer que les foncteurs introduits dans la proposition sont bien des foncteurs fibres i.e. que ce sont des foncteurs tensoriels $\mathcal{C}_{sr} \to \operatorname{Vect}^f(\mathbb{C})$ qui sont $\mathbb{C}$-linéaires, fidèles et exacts. On vérifie le seul point qui n'est pas immédiat : la fidélité des foncteurs $\omega_1^{(\widetilde{a})}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$. On suppose que $\widetilde{S}_1(\widetilde{a}) = 0$ et on veut donc montrer que $\widetilde{S}_1 = 0$. De l'égalité $\phi_p\left(\widetilde{S}_1\right) = B_1 \widetilde{S}_1 A_1^{-1}$ on obtient que $\widetilde{S}_1\left(\widetilde{a}^{p^k}\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$, les coefficients de $\widetilde{S}_1$ ont une infinité de racines mais comme ce sont des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$, ils sont donc nuls. □

On obtient aussi par l'équivalence de catégories $\mathscr{F} : \mathcal{S}_{sr} \to \mathcal{E}_{sr}$ que la catégorie $\mathcal{S}_{sr}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$, munie du foncteur fibre $\omega \circ \mathscr{F}$ où ω est un foncteur fibre de la catégorie tannakienne $\mathcal{E}_{sr}$.

3.6 Analogue du théorème de densité de Schlesinger pour les équations de Mahler

3.6.1 Groupoïde de Galois de $\mathcal{C}_{sr}$

Soit G le groupoïde de Galois "complet" d'une catégorie tannakienne $\mathcal{C}$ (comme défini en Définition 3.2.1) et G' un sous-groupoïde proalgébrique transitif de G. La catégorie des représentations de G est équivalente à la catégorie $\mathcal{R}ep(G')$ des représentations de G' (voir Remarque 3.2.30). Puisque $\mathcal{R}ep(G')$, $\mathcal{R}ep(G)$ et $\mathcal{C}$ sont équivalentes, on peut considérer G' au lieu de G et dire que G' est un groupoïde de Galois de $\mathcal{C}$, d'où la définition suivante.

Définition 3.6.1. Le *groupoïde de Galois de la catégorie des connexions* $\mathcal{C}_{sr}$, noté G, est tel que

- les objets sont les foncteurs fibres $\omega_0, \omega_\infty, \omega_1^{(\widetilde{a})} : \mathcal{C}_{sr} \to \operatorname{Vect}^f(\mathbb{C})$ définis dans la Proposition 3.5.9,
- les morphismes entre $\omega, \omega' \in \{\omega_0\} \cup \{\omega_\infty\} \cup \left\{\omega_1^{(\widetilde{a})} \mid \widetilde{a} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}\right\}$ sont les isomorphismes tensoriels $\omega \to \omega'$:

$$G(\omega, \omega') = \operatorname{Iso}^{\otimes}(\omega, \omega').$$

Remarque 3.6.2. Dans la section suivante, on va construire explicitement des morphismes de ce groupoïde entre tous ses objets, il est donc transitif.

Proposition 3.6.3. *Le groupoïde de Galois local G_0 (respectivement G_1 et G_∞) s'identifie à un sous-groupoïde du groupoïde de Galois G de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$.*

Démonstration. On introduit le foncteur « projection »

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{P}: & \mathcal{C}_{sr} & \to & \mathcal{P}^{(0)} \\ & \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{sr}\right) & \rightsquigarrow & A_0 \\ & \left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right) & \rightsquigarrow & S_0\,. \end{array}$$

Ce foncteur est bien défini car l'égalité $S_0A_0 = B_0S_0$ signifie que $S_0 : A_0 \to B_0$ est un morphisme de $\mathcal{P}^{(0)}$. Il est essentiellement surjectif car

$$\mathscr{P}\left(\left(A_0, A_0, A_0, I_n, I_n\right)\right) = A_0 \text{ et } \left(A_0, A_0, A_0, I_n, I_n\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{sr}\right)$$

et il est plein. On remarque que

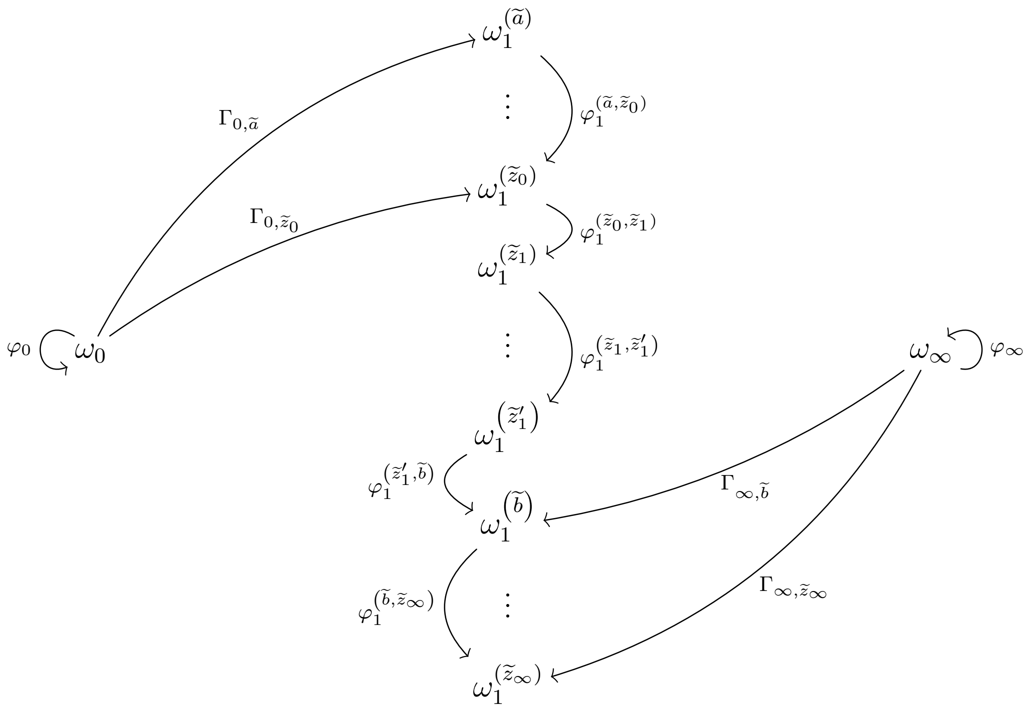
$$\omega_0 = \omega_{l,0}\mathscr{P}$$

donc la restriction des éléments de $\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,0}\right)$ à $\mathcal{C}_{sr}$ donne un morphisme de groupes proalgébriques

$$\mathscr{P}^{\star} : \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,0}\right) \to \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_0\right).$$

Montrons que ce morphisme est une immersion fermée. D'après [DM82, Proposition 2.21], cela revient à montrer que tout objet de la catégorie $\mathcal{R}ep\left(\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,0}\right)\right)$ est isomorphe à un sous-quotient d'un objet $\mathscr{P}^{\star}\left(\mathcal{X}\right)$ où $\mathcal{X}$ est un objet de $\mathcal{R}ep\left(\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_0\right)\right)$. Par dualité tannakienne, la catégorie $\mathcal{R}ep\left(\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{l,0}\right)\right)$ est équivalente à $\mathcal{P}^{(0)}$ et $\mathcal{R}ep\left(\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_0\right)\right)$ est équivalente à $\mathcal{C}_{sr}$. Il suffit alors de montrer que tout objet de la catégorie $\mathcal{P}^{(0)}$ est isomorphe à un sous-quotient d'un objet $\mathscr{P}\left(\mathcal{X}\right)$ où $\mathcal{X}$ est un objet de $\mathcal{C}_{sr}$. Puisque $\mathscr{P}$ est essentiellement surjectif, ceci est bien vérifié. Ainsi, G_0 s'identifie à un sous-groupoïde du groupoïde de Galois de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$. Le même argument montre que G_1 et G_∞ s'identifient à des sous-groupoïdes du groupoïde de Galois de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$. □

On note aussi G_0, G_1, G_∞ les sous-groupoïdes du groupoïde de Galois G qui sont identifiés à, respectivement, G_0, G_1, G_∞ par la proposition précédente. Ces sous-groupoïdes donnent des éléments $\varphi_0 \in G\left(\omega_0, \omega_0\right)$, $\varphi_\infty \in G\left(\omega_\infty, \omega_\infty\right)$ et $\varphi_1^{(\widetilde{c},\widetilde{d})} \in G\left(\omega_1^{(\widetilde{c})}, \omega_1^{(\widetilde{d})}\right)$ pour tous $\widetilde{c}, \widetilde{d} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \{\widetilde{1}\}$. Dans la Section 3.6.2, on construit des éléments $\Gamma_{0,\widetilde{a}} \in G\left(\omega_0, \omega_1^{(\widetilde{a})}\right)$ et $\Gamma_{\infty,\widetilde{b}} \in G\left(\omega_\infty, \omega_1^{(\widetilde{b})}\right)$ pour tous $\widetilde{a} \in \Sigma_0$, $\widetilde{b} \in \Sigma_\infty$, ce sont des isomorphismes galoisiens. Ils peuvent être vus comme des chemins dans le groupoïde de Galois G reliant le point ω_0 au point $\omega_1^{(\widetilde{a})}$ et le point ω_∞ au point $\omega_1^{(\widetilde{b})}$ respectivement. Ainsi, G est un groupoïde transitif. On écrit $\widetilde{z}_0 \in \Sigma_0$, $\widetilde{z}_\infty \in \Sigma_\infty$ et $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1' \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \left(\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty \cup \{\widetilde{1}\}\right)$. Le diagramme suivant (qui n'est pas commutatif) représente le groupoïde transitif G.



3.6.2 Construction d'isomorphismes tensoriels

Soit $\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{sr}\right)$. Pour construire les chemins $\Gamma_{0,\widetilde{a}}$ et $\Gamma_{\infty,\widetilde{b}}$ du groupoïde de Galois G de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$, nous aurons besoin de spécialiser les matrices $\widetilde{M_0}$ et $\widetilde{M_\infty}$. C'est pour cela que nous introduisons la définition suivante.

Définition 3.6.4. L'*ensemble des singularités* d'une matrice M est

$$S(M) := \text{Pôles}(M) \cup \text{Pôles}\left(M^{-1}\right) = \text{Pôles}(M) \cup \text{Zéros}\left(\det M\right).$$

Catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$

Notation 3.6.5. Soit E_0 (respectivement E_∞) un sous-ensemble fini de $D \setminus \{0\}$ (respectivement $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$). En pratique, E_0 et E_∞ seront tels que

$$E_0 = S(A) \cap (D \setminus \{0\}) \quad \text{et} \quad E_\infty = S(A) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{D}\right)$$

pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(z)\right)$. Pour $i = 0, \infty$, on définit $E_i^{p^{\mathbb{Z}}} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_i^{p^k}$ où

$$E_i^{p^k} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{p^{-k}} \in E_i\} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z}_{<0}, \quad E_i^{p^k} = \{z^{p^k} \mid z \in E_i\} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

et on pose

$$\widetilde{E_i} := \left\{(z, \arg(z) + 2\pi l) \,\middle|\, z \in E_i^{p^{\mathbb{Z}}}, l \in \mathbb{Z}\right\}$$

où pour $z \in \mathbb{C}^\star$, $\arg(z)$ désigne un argument de z.

On considère la catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ qui est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{sr}$ dont les objets sont les $\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_{sr})$ tels que pour $i = 0, \infty$,

$$S\left(\widetilde{M_i}\right) \subset \widetilde{E_i}.$$

Lemme 3.6.6. *Tout morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ a un noyau.*

Démonstration. Soit $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right)$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ de $\mathcal{X}$ de rang n_1 dans $\mathcal{Y}$ de rang n_2 avec $\mathcal{X} := \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right)$ et $\mathcal{Y} := \left(B_0, B_1, B_\infty, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty}\right)$. En particulier, $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right)$ est aussi un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$. Par l'équivalence de catégories entre $\mathcal{E}_{sr}$ et $\mathcal{C}_{sr}$ et le Lemme 3.5.1, il existe

$$\mathcal{X}' := \left(A'_0, A'_1, A'_\infty, \widetilde{M_0}', \widetilde{M_\infty}'\right) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_{sr})$$

de rang $n_1 - r$ où $r = \operatorname{rg}(S_0) = \operatorname{rg}(\widetilde{S_1}) = \operatorname{rg}(S_\infty)$ (on remarque que les matrices $S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty$ ont même rang) et

$$\left(K_0, \widetilde{K_1}, K_\infty\right) \in \operatorname{Hom}(\mathcal{C}_{sr})$$

tels que

$$\left(\mathcal{X}', \left(K_0, \widetilde{K_1}, K_\infty\right) : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}\right) \tag{3.16}$$

est un noyau du morphisme $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right)$ dans $\mathcal{C}_{sr}$. On obtient aussi que

$$\operatorname{rg}(K_0) = \operatorname{rg}\left(\widetilde{K_1}\right) = \operatorname{rg}(K_\infty) = n_1 - r.$$

Montrons que $\mathcal{X}'$ est un objet de $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$. Ainsi, (3.16) sera aussi un noyau du morphisme $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right)$ dans $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$. Étudions les singularités de $\widetilde{M_0}'$. On a $\widetilde{K_1}\widetilde{M_0}' = \widetilde{M_0}K_0$ puisque $\left(K_0, \widetilde{K_1}, K_\infty\right) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_{sr}}(\mathcal{X}', \mathcal{X})$, donc

$$K_0\widetilde{M_0}'^{-1} = \widetilde{M_0}^{-1}\widetilde{K_1}. \tag{3.17}$$

Comme $\operatorname{rg}(K_0) = n_1 - r$, il existe une matrice de permutation $T \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$ telle que

$$TK_0 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L_1 \in \mathrm{GL}_{n_1-r}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad L_2 \in \mathcal{M}_{r,n_1-r}(\mathbb{C}).$$

Par l'égalité (3.17),

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} TK_0\widetilde{M_0}'^{-1}}_{=\widetilde{M_0}'^{-1}} = \begin{pmatrix} L_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} T\widetilde{M_0}^{-1}\widetilde{K_1}$$

ainsi

$$\text{Pôles}\left(\widetilde{M_0}'^{-1}\right) \subset \underbrace{\text{Pôles}\left(L_1^{-1}\right)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{\text{Pôles}\left(T\right)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{\text{Pôles}\left(\widetilde{M_0}^{-1}\right)}_{\subset \widetilde{E_0}} \cup \underbrace{\text{Pôles}\left(\widetilde{K_1}\right)}_{\subset\{\widetilde{1}\}}$$

d'où

$$\text{Pôles}\left(\widetilde{M_0}'^{-1}\right) \subset \widetilde{E_0}. \tag{3.18}$$

Montrons que

$$\text{Zéros}\left(\det\left(\widetilde{M_0}'^{-1}\right)\right) \subset \widetilde{E_0}. \tag{3.19}$$

Comme $\widetilde{K_1} \in \mathcal{M}_{n_1,n_1-r}\left(\mathbb{C}\left[\widetilde{\ln}, \widetilde{\ln}^{-1}\right]\right)$ est de rang $n_1 - r$, il existe une matrice de permutation $U \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$ telle que

$$U\widetilde{K_1} = \begin{pmatrix} \widetilde{L_1} \\ \widetilde{L_2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \widetilde{L_1} \in \mathrm{GL}_{n_1-r}\left(\mathbb{C}\left[\widetilde{\ln}, \widetilde{\ln}^{-1}\right]\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{L_2} \in \mathcal{M}_{r,n_1-r}\left(\mathbb{C}\left[\widetilde{\ln}, \widetilde{\ln}^{-1}\right]\right).$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe

$$\widetilde{a} \in \text{Zéros}\left(\det\left(\widetilde{M_0}'^{-1}\right)\right) \cap \left(\Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}\right).$$

Alors, $\widetilde{a}$ n'est pas un pôle de $\widetilde{M_0}'^{-1}$ d'après (3.18). On peut donc considérer $\widetilde{M_0}'^{-1}(\widetilde{a})$ et il existe $v \in \mathbb{C}^{n_1-r}$ non nul tel que

$$\widetilde{M_0}'^{-1}(\widetilde{a})\, v = 0 \in \mathbb{C}^{n_1-r}.$$

Par l'égalité (3.17),

$$0 = K_0\widetilde{M_0}'^{-1}(\widetilde{a})\, v = \widetilde{M_0}^{-1}(\widetilde{a})\, U^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{L_1}(\widetilde{a}) \\ \widetilde{L_2}(\widetilde{a}) \end{pmatrix} v.$$

Or $\widetilde{M_0}^{-1}(\widetilde{a})\, U^{-1}$ est une matrice inversible car $\widetilde{a} \notin \widetilde{E_0}$ et $S\left(\widetilde{M_0}\right) \subset \widetilde{E_0}$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{L_1}(\widetilde{a}) \\ \widetilde{L_2}(\widetilde{a}) \end{pmatrix} v = 0$$

et en particulier on a $\widetilde{L_1}(\widetilde{a})\, v = 0$ donc $\widetilde{a} \in \text{Zéros}\left(\det\left(\widetilde{L_1}\right)\right)$. L'égalité vérifiée par $\widetilde{K_1}$,

$$\phi_p\left(\widetilde{K_1}\right) A_1' = A_1\widetilde{K_1},$$

donne $U\widetilde{K_1}(\widetilde{a}^p)\, A_1'v = 0$ soit

$$\begin{pmatrix} \widetilde{L_1}(\widetilde{a}^p) \\ \widetilde{L_2}(\widetilde{a}^p) \end{pmatrix} A_1'v = 0$$

avec $A_1'v \neq 0$ donc $\widetilde{a}^p \in \text{Zéros}\left(\det\left(\widetilde{L_1}\right)\right)$. On obtient ainsi que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{a}^{p^k} \in \text{Zéros}\left(\det\left(\widetilde{L_1}\right)\right).$$

Or, $\widetilde{a} \neq \widetilde{1}$ donc $\det\left(\widetilde{L_1}\right)$ a une infinité de racines, comme c'est un polynôme de Laurent en $\widetilde{\ln}$, il est nul et cela contredit le fait que $\widetilde{L_1}$ est une matrice inversible. Finalement, par (3.18) et (3.19),

$$S\left(\widetilde{M_0}'\right) \subset \widetilde{E_0}.$$

On montre de même que

$$S\left(\widetilde{M_\infty}'\right) \subset \widetilde{E_\infty},$$

d'où

$$\left(A_0', A_1', A_\infty', \widetilde{M_0}', \widetilde{M_\infty}'\right) \in \text{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right),$$

ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.6.7. *La catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. La catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ est une sous-catégorie tensorielle rigide de $\mathcal{C}_{sr}$. En effet, cette catégorie contient l'objet unité $\mathbf{1} = (1,1,1,1,1)$ et par les propriétés du produit tensoriel sur les matrices, elle est laissée stable par les constructions tensorielles et chaque objet a un dual.

Le seul point non immédiat de la Proposition A.1.8 pour montrer que $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{C}_{sr}$ est l'existence des noyaux et des conoyaux. L'existence des noyaux découle du lemme précédent et on obtient l'existence des conoyaux en passant au dual car la dualité échange les noyaux avec les conoyaux. Le foncteur fibre de la catégorie tannakienne $\mathcal{C}_{sr}$ se restreint en un foncteur fibre pour $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ ainsi $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ est une sous-catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{C}_{sr}$. □

Dans la suite, on utilise les mêmes notations pour les restrictions à $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ des foncteurs fibres $\omega_0, \omega_\infty, \omega_1^{(\widetilde{a})}, \widetilde{a} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \left(\widetilde{E_0} \cup \widetilde{E_\infty} \cup \{\widetilde{1}\}\right)$ définis en Proposition 3.5.9.

Lemme 3.6.8. *Si $\mathcal{X} = \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right)$ est un objet de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$ alors il existe deux sous-ensembles finis E_0 et E_∞ de $D \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ respectivement tels que $\mathcal{X} \in \text{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right)$. En particulier,*

$$E_0 = S(A) \cap (D \setminus \{0\}) \quad \textit{et} \quad E_\infty = S(A) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{D}\right)$$

pour une matrice $A \in \text{GL}_n\left(\mathbb{C}(z)\right)$.

Démonstration. En utilisant les notations de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$, introduite dans la Section 3.5.2, la matrice

$$A := \begin{cases} \phi_p(W_0)A_0W_0^{-1} & \text{sur} \quad D \\ \phi_p(W_\infty)A_\infty W_\infty^{-1} & \text{sur} \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D} \end{cases} \tag{3.20}$$

satisfait
$$\pi^{\star}A = \phi_p\left(\widetilde{W_1}\right) A_1 \widetilde{W_1}^{-1}. \tag{3.21}$$
Ainsi, par le Lemme 2.1.3, $A \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(z)\right)$. De l'égalité $\widetilde{M_0} = \widetilde{W_1}^{-1}\pi^{\star}W_0$, on a
$$S\left(\widetilde{M_0}\right) \subset \left(S\left(\widetilde{W_1}\right) \cup S\left(\pi^{\star}W_0\right)\right) \cap \Sigma_0.$$
L'égalité (3.21) donne
$$\widetilde{W_1} = \phi_p^{-1}\left(\pi^{\star}A\right)\cdots\phi_p^{-m}\left(\pi^{\star}A\right)\phi_p^{-m}\left(\widetilde{W_1}\right)A_1^{-m} \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{N}^{\star}.$$
Pour un $m \in \mathbb{N}$ assez grand et en utilisant que $\widetilde{W_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^{\star}}\right)\right)$, on obtient
$$S\left(\widetilde{W_1}\right) \cap \Sigma_0 \subset \widetilde{E_0} \quad \text{avec} \quad E_0 := S(A) \cap \left(D \setminus \{0\}\right),$$
voir Notation 3.6.5. De même, grâce à (3.20), on peut montrer que
$$S\left(\pi^{\star}W_0\right) \subset \widetilde{E_0}.$$
Ainsi,
$$S\left(\widetilde{M_0}\right) \subset \widetilde{E_0}$$
et E_0 est par construction un sous-ensemble fini de $D \setminus \{0\}$.

On obtient un résultat analogue pour $\widetilde{M_\infty}$: il existe un sous-ensemble fini de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ noté E_∞ tel que
$$S\left(\widetilde{M_\infty}\right) \subset \widetilde{E_\infty}.$$
Finalement, $\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right)$. □

D'après le Lemme 3.6.8, on sait que pour tout objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}_{sr}$ il existe deux ensembles finis $E_0 \subset D \setminus \{0\}$ et $E_\infty \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ tels que $\mathcal{X}$ est en particulier un objet de $\mathcal{C}_{\underline{E_0},E_\infty}$. À partir de maintenant, on considère deux sous-ensembles finis de $D \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, notés respectivement E_0 et E_∞.

Construction d'isomorphismes tensoriels de ω_0 dans $\omega_1^{(\widetilde{a})}$, $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$

Proposition 3.6.9. *Soit $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$. La transformation naturelle*
$$\Gamma_{0,\widetilde{a}} : \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_0}(\widetilde{a})$$
est un isomorphisme tensoriel de ω_0 dans $\omega_1^{(\widetilde{a})}$ (on confond l'application linéaire avec sa matrice dans les bases canoniques).

Démonstration. Pour montrer cela, on doit vérifier que les conditions suivantes sont remplies :

- Condition pour être un isomorphisme de foncteurs. Pour tous

$$\mathcal{X} := \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right), \mathcal{Y} := \left(B_0, B_1, B_\infty, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right)$$

et tout $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, le diagramme suivant est commutatif car $\widetilde{N_0}S_0 = \widetilde{S_1}\widetilde{M_0}$:

$$\begin{tikzcd} \omega_0(\mathcal{X}) \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "\widetilde{M_0}(\widetilde{a})"'] & \omega_0(\mathcal{Y}) \arrow[d, "\widetilde{N_0}(\widetilde{a})"] \\ \omega_1^{(\widetilde{a})}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\widetilde{S_1}(\widetilde{a})"'] & \omega_1^{(\widetilde{a})}(\mathcal{Y}) \end{tikzcd}.$$

Ceci montre que $\Gamma_{0,\widetilde{a}}$ est un morphisme de foncteurs. De plus, c'est un isomorphisme car les $\widetilde{M_0}(\widetilde{a})$ sont des isomorphismes (par construction, $\widetilde{M_0}(\widetilde{a})$ est inversible).
- Condition de $\otimes$-compatibilité. Pour tous $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right)$,

$$\Gamma_{0,\widetilde{a}}(\mathcal{X}) \otimes \Gamma_{0,\widetilde{a}}(\mathcal{Y}) = \widetilde{M_0}(\widetilde{a}) \otimes \widetilde{N_0}(\widetilde{a}) = \left(\widetilde{M_0} \otimes \widetilde{N_0}\right)(\widetilde{a}) = \Gamma_{0,\widetilde{a}}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}).$$

□

Construction d'isomorphismes tensoriels de ω_∞ dans $\omega_1^{(\widetilde{b})}$, $\widetilde{b} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$

Proposition 3.6.10. *Soit $\widetilde{b} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$. La transformation naturelle*

$$\Gamma_{\infty,\widetilde{b}} : \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}\right)$$

est un isomorphisme tensoriel de ω_∞ dans $\omega_1^{(\widetilde{b})}$.

Démonstration. Preuve analogue à celle de la Proposition 3.6.9. □

Construction d'automorphismes tensoriels de ω_0 et ω_∞

Proposition 3.6.11. *La transformation naturelle*

$$\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow A_0$$

appartient à $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_0)$.

Démonstration. Cela découle de l'égalité $S_0A_0 = B_0S_0$ vérifiée par les morphismes de la catégorie des connexions. □

On obtient de même le résultat suivant.

Proposition 3.6.12. *La transformation naturelle*

$$\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow A_\infty$$

appartient à $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_\infty)$.

Construction d'isomorphismes tensoriels de $\omega_1^{(\widetilde{a})}$ dans $\omega_1^{(\widetilde{b})}$

Proposition 3.6.13. *Soit $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \left(\widetilde{E_0} \cup \widetilde{E_\infty} \cup \{\widetilde{1}\}\right)$. La transformation naturelle*

$$\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow A_1$$

est un élément de $\mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_1^{(\widetilde{a})}, \omega_1^{(\widetilde{a}p)}\right)$.

Corollaire 3.6.14. *Soient $\widetilde{a}, \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2 \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$ et $\widetilde{b}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2 \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$. On note*

$$\mathcal{X} := \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right)$$

alors

$$\left[\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_0}\left(\widetilde{a}_1\right)\widetilde{M_0}\left(\widetilde{a}_2\right)^{-1}\right] \in \mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_1^{(\widetilde{a}_2)}, \omega_1^{(\widetilde{a}_1)}\right),$$

$$\left[\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}_1\right)\widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}_2\right)^{-1}\right] \in \mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_1^{(\widetilde{b}_2)}, \omega_1^{(\widetilde{b}_1)}\right),$$

$$\left[\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_0}\left(\widetilde{a}\right)A_0\widetilde{M_0}\left(\widetilde{a}\right)^{-1}\right] \in \mathrm{Aut}^\otimes\left(\omega_1^{(\widetilde{a})}\right),$$

$$\left[\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}\right)A_\infty\widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}\right)^{-1}\right] \in \mathrm{Aut}^\otimes\left(\omega_1^{(\widetilde{b})}\right).$$

Démonstration. Ceci découle des Propositions 3.6.9, 3.6.10, 3.6.11 et 3.6.12. □

Dans la suite, on notera aussi G la restriction de G au groupoïde de Galois de $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$.

Corollaire 3.6.15. *Les groupoïdes de Galois locaux G_0, G_1, G_∞, les $\Gamma_{0,\widetilde{a}}$, $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$ (introduits en Proposition 3.6.9) et les $\Gamma_{\infty,\widetilde{b}}$, $\widetilde{b} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$ (introduits en Proposition 3.6.10) sont des éléments du groupoïde de Galois G. Le sous-groupoïde de G engendré par ces éléments est transitif.*

On va montrer qu'ils engendrent un sous-groupoïde Zariski-dense dans G. Pour la théorie de Picard-Vessiot, l'argument principal pour montrer le théorème de Schlesinger, ou ses analogues, est la correspondance de Galois. Pour la théorie des catégories tannakiennes, cela correspond au Théorème 3.2.37.

3.6.3 Théorème de densité dans le cas régulier

Catégories $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{C}_r$

Définition 3.6.16. On dit que $A \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{E}_{sr}\right)$ est un *objet régulier de la catégorie $\mathcal{E}_{sr}$* si le système $\phi_p(Y) = AY$ est méromorphiquement équivalent en 0, en 1 et en ∞ à un système régulier en 0, en 1 et en ∞ respectivement.

On dit que $\left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{sr}\right)$ de rang $n \in \mathbb{N}^\star$ est un *objet régulier de la catégorie $\mathcal{C}_{sr}$* si $A_0 = A_1 = A_\infty = I_n$.

On note $\mathcal{E}_r$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{sr}$ dont les objets sont les objets réguliers de $\mathcal{E}_{sr}$. C'est une sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{E}_{sr}$.

On note $\mathcal{C}_r$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{sr}$ dont les objets sont les objets réguliers de $\mathcal{C}_{sr}$.

Les catégories $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{C}_r$ sont équivalentes

Proposition 3.6.17. *Les catégories $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{C}_r$ sont équivalentes. L'équivalence est donnée par le foncteur $\mathscr{H} : \mathcal{C}_r \to \mathcal{E}_r$ qui associe à un objet $\left(I_n, I_n, I_n, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right)$ de $\mathcal{C}_r$, l'objet*

$$A := \phi_p\left(W_0\right) W_0^{-1} \tag{3.22}$$

de $\mathcal{E}_r$ (notation introduite dans la catégorie des connexions, Section 3.5.2) et au morphisme $\left(S_0, \widetilde{S_1}, S_\infty\right) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_r}\left(\left(I_n, I_n, I_n, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right), \left(I_n, I_n, I_n, \widetilde{N_0}, \widetilde{N_\infty}\right)\right)$ de $\mathcal{C}_r$ le morphisme

$$R := X_0 S_0 W_0^{-1}$$

de $\mathcal{E}_r$ où

$$\widetilde{X_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right),\ X_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right),\ X_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

sont tels que

$$\begin{cases} \widetilde{X_1}\widetilde{N_0} = \pi^\star X_0 \\ \widetilde{X_1}\widetilde{N_\infty} = \pi^\star X_\infty\,. \end{cases}$$

Démonstration. Ce foncteur est bien défini pour les objets car les égalités $\phi_p\left(\widetilde{M_0}\right) = \widetilde{M_0}$ et $\phi_p\left(\widetilde{M_\infty}\right) = \widetilde{M_\infty}$ impliquent que

$$\pi^\star A = \phi_p\left(\widetilde{W_1}\right)\widetilde{W_1}^{-1} = \phi_p\left(\pi^\star W_\infty\right)\left(\pi^\star W_\infty\right)^{-1}. \tag{3.23}$$

Par le Lemme 2.1.3, on obtient que $\pi^\star A \in \mathrm{GL}_n\left(\pi^\star \mathbb{C}(z)\right)$ d'où $A \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(z)\right)$. De plus, par les égalités (3.22) et (3.23), A est un objet régulier. On peut vérifier que le foncteur $\mathscr{H}$ est aussi bien défini pour les morphismes.

Le foncteur $\mathscr{H}$ est une équivalence de catégories car il est :

- essentiellement surjectif. Soit $A \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{E}_r\right)$. Puisque le système $\phi_p(Y) = AY$ est méromorphiquement équivalent en 0 à un système régulier en 0, il existe une matrice B régulière en 0 et une matrice $T_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{z\})\right)$ telles que $B = \phi_p\left(T_0\right)^{-1} A T_0$. Comme B est régulière en 0, par la Proposition 2.2.3, il existe $Y^{(0)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right)$ tel que $B = \phi_p\left(Y^{(0)}\right) {Y^{(0)}}^{-1}$. Ainsi,

  $$A = \phi_p\left(W_0\right)\left(W_0\right)^{-1} \tag{3.24}$$

  avec $W_0 := T_0 Y^{(0)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{z\})\right)$. Comme $A \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(z)\right)$, par l'égalité (3.24) on obtient $W_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right)$. On construit de même $W_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right)$ tel que

  $$A = \phi_p\left(W_\infty\right)\left(W_\infty\right)^{-1}.$$

De même, il existe $T_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-1\}))$ tel que $C = \phi_p(T_1)^{-1} A T_1$ avec C régulière en 1. Ainsi, par le Corollaire 2.2.6, il existe $\widetilde{Y}^{(1)} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right)$ tel que $\phi_p\left(\widetilde{Y}^{(1)}\right) = \pi^\star C.\widetilde{Y}^{(1)}$ et

$$\pi^\star A = \phi_p\left(\widetilde{W_1}\right)\left(\widetilde{W_1}\right)^{-1} \tag{3.25}$$

avec $\widetilde{W_1} := \pi^\star T_1.\widetilde{Y}^{(1)}$ à coefficients méromorphes en $\widetilde{1}$. Par l'égalité (3.25), on obtient que $\widetilde{W_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right)$. On a

$$\mathcal{X} := \left(I_n, I_n, I_n, \widetilde{W_1}^{-1}\pi^\star W_0, \widetilde{W_1}^{-1}\pi^\star W_\infty\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_r\right)$$

et

$$\mathscr{H}(\mathcal{X}) = A.$$

- plein et fidèle. Ceci est clair par construction.

□

Théorème de densité

Le fait suivant rend la démonstration du théorème de densité dans le cas régulier plus simple.

Lemme 3.6.18. *Si $\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right)$ est un morphisme de $\mathcal{C}_{sr}$ entre deux objets réguliers alors $\widetilde{S}_1$ est à coefficients constants.*

Démonstration. Dans ce cas, pour tout $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star}$, $\widetilde{S}_1(\widetilde{z}^p) = \widetilde{S}_1(\widetilde{z})$. La matrice $S_1 := \widetilde{S}_1 \circ \widetilde{\ln}^{-1}$ a des coefficients méromorphes en 1 et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S_1(pz) = S_1(z)$. On peut écrire $S_1(z) = \sum_{k \geq N} T_k z^k$ où les T_k sont des matrices à coefficients constants. Cela impose donc que $T_k = p^k T_k$ soit pour $k \neq 0$, T_k est la matrice nulle, ce qui conclut. □

On note $\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ dont les objets sont les objets réguliers. C'est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ munie des foncteurs fibres

$$\omega_0, \omega_\infty, \omega_1 : \mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty} \to \mathrm{Vect}^f(\mathbb{C})$$

définis de la façon suivante :

- si $\mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}\right)$ est de rang n alors pour $i = 0, 1, \infty$,

$$\omega_i(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^n,$$

- si $\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) \in \mathrm{Hom}\left(\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}\right)$ alors $\widetilde{S}_1$ a des coefficients constants d'après le lemme précédent et on définit pour $i = 0, \infty$,

$$\omega_i\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) = S_i \quad \text{et} \quad \omega_1\left(S_0, \widetilde{S}_1, S_\infty\right) = \widetilde{S}_1.$$

Théorème 3.6.19. *On note* $\mathcal{X} = \left(I_n, I_n, I_n, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right)$ *un objet de la catégorie* $\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}$. *Le sous-groupe* H *de* $G = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_1)$ *formé des*

$$\mathcal{X} \rightsquigarrow \widetilde{M_0}(\widetilde{a}_1)\,\widetilde{M_0}(\widetilde{a}_2)^{-1};$$
$$\mathcal{X} \rightsquigarrow \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}_1\right)\widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}_2\right)^{-1}$$

où $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2 \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$ *et* $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2 \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$ *est Zariski-dense dans* G.

Démonstration. On utilise le critère de densité donné par le Théorème 3.2.35. On considère $D_1 \subset \omega_1(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^n$ une droite stable par $H(\mathcal{X})$. Il faut prouver qu'elle est stable par $G(\mathcal{X})$. Par hypothèse, pour tous $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2 \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$, on a

$$\widetilde{M_0}(\widetilde{a}_1)\,\widetilde{M_0}(\widetilde{a}_2)^{-1} D_1 = D_1$$

et donc

$$\widetilde{M_0}(\widetilde{a}_1)^{-1} D_1 = \widetilde{M_0}(\widetilde{a}_2)^{-1} D_1.$$

Ainsi, la droite $\widetilde{M_0}(\widetilde{a})^{-1} D_1$ ne dépend pas de $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$, on la note D_0,

$$D_0 := \widetilde{M_0}(\widetilde{a})^{-1} D_1 \subset \mathbb{C}^n.$$

Soient $\widetilde{d_1} \in \mathbb{C}^n$, $d_0 \in \mathbb{C}^n$ tels que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\widetilde{d_1}) = D_1$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(d_0) = D_0$. Pour tout $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$, il existe $\widetilde{m_0}(\widetilde{a}) \in \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{M_0}(\widetilde{a})\, d_0 = \widetilde{m_0}(\widetilde{a})\, \widetilde{d_1}$. Il existe donc une fonction $\widetilde{m_0} : \Sigma_0 \to \mathbb{C}$ telle que

$$\widetilde{M_0} d_0 = \widetilde{m_0} \widetilde{d_1}. \tag{3.26}$$

De même, il existe $d_\infty \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $\widetilde{b} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(d_\infty) = \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}\right)^{-1} D_1$ et il existe une fonction $\widetilde{m_\infty} : \Sigma_\infty \to \mathbb{C}$ telle que

$$\widetilde{M_\infty} d_\infty = \widetilde{m_\infty} \widetilde{d_1}. \tag{3.27}$$

On obtient que

- $\mathcal{X}' := (1, 1, 1, \widetilde{m_0}, \widetilde{m_\infty})$ est un objet de $\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}$. En effet, l'égalité (3.26) implique que $\widetilde{m_0}$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des coefficients de $\widetilde{M_0}$ donc $\widetilde{m_0}$ est méromorphe sur Σ_0. Elle vérifie $\phi_p(\widetilde{m_0}) = \widetilde{m_0}$. L'égalité (3.26) implique aussi que l'ensemble des singularités de $\widetilde{m_0}$ est contenu dans l'ensemble des singularités de $\widetilde{M_0}$. Par le même argument, $\widetilde{m_\infty}$ est méromorphe sur Σ_∞ et vérifie $\phi_p(\widetilde{m_\infty}) = \widetilde{m_\infty}$. L'ensemble des singularités de $\widetilde{m_\infty}$ est contenu dans l'ensemble des singularités de $\widetilde{M_\infty}$. Il reste à montrer qu'il existe $\widetilde{w_1} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ non nul, $w_0 \in \mathcal{M}(D)$ et $w_\infty \in \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)$ tels que

$$\begin{cases} \widetilde{w_1}\widetilde{m_0} = \pi^\star w_0 \\ \widetilde{w_1}\widetilde{m_\infty} = \pi^\star w_\infty \end{cases}$$

  Puisque $\mathcal{X}$ est un objet de la catégorie $\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}$, il existe

$$\widetilde{W_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right),\, W_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(D\right)\right),\, W_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

tels que $\widetilde{W_1}\widetilde{M_0} = \pi^\star W_0$ et $\widetilde{W_1}\widetilde{M_\infty} = \pi^\star W_\infty$. Ainsi,

$$\begin{cases} \pi^\star W_0 d_0 = \widetilde{W_1}\widetilde{M_0} d_0 = \widetilde{m_0}\widetilde{W_1}\widetilde{d_1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_0; \\ \pi^\star W_\infty d_\infty = \widetilde{W_1}\widetilde{M_\infty} d_\infty = \widetilde{m_\infty}\widetilde{W_1}\widetilde{d_1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_\infty. \end{cases}$$

Un coefficient non nul de la matrice colonne $\widetilde{W_1}\widetilde{d_1}$ satisfait les conditions requises pour être $\widetilde{w_1}$. En effet, on a bien $\widetilde{w_1} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ et l'égalité $\pi^\star W_0 d_0 = \widetilde{m_0}\widetilde{W_1}\widetilde{d_1}$ montre que w_0 est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des coefficients de W_0 donc w_0 est méromorphe sur D. On obtient le résultat analogue pour w_∞.

- $m = \left(d_0, \widetilde{d_1}, d_\infty\right) : \mathcal{X}' \rightsquigarrow \mathcal{X}$ est un morphisme de $\mathcal{C}_{r,E_0,E_\infty}$. Ceci est clair car $d_0, \widetilde{d_1}, d_\infty \in \mathbb{C}^n$ vérifient
$$\begin{cases} \widetilde{d_1}\widetilde{m_0} = \widetilde{M_0} d_0 \\ \widetilde{d_1}\widetilde{m_\infty} = \widetilde{M_\infty} d_\infty\,. \end{cases}$$

Pour tout $g \in \mathrm{Aut}^\otimes\left(\omega_{1|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$, le diagramme suivant est donc commutatif

$$\begin{array}{ccc} \omega_1\left(\mathcal{X}'\right) & \xrightarrow{g(\mathcal{X}')} & \omega_1\left(\mathcal{X}'\right) \\ {\scriptstyle \omega_1(m)=\widetilde{d_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_1(m)=\widetilde{d_1}} \\ \omega_1\left(\mathcal{X}\right) & \xrightarrow[g(\mathcal{X})]{} & \omega_1\left(\mathcal{X}\right) \end{array}$$

ainsi, $g\left(\mathcal{X}\right)\widetilde{d_1} = \widetilde{d_1} g\left(\mathcal{X}'\right) = g\left(\mathcal{X}'\right)\widetilde{d_1}$. Comme $g\left(\mathcal{X}'\right) \in \mathbb{C}^\star$, on a $g\left(\mathcal{X}\right) D_1 = D_1$ ce qui conclut la preuve. □

3.6.4 Théorème de densité dans le cas singulier régulier

On considère le système singulier régulier en $0, 1$ et ∞ suivant :

$$\phi_p(Y) = AY$$

avec $A(z) \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(z)\right)$.

On se restreint à la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ de $\mathcal{C}_{sr}$. Par le Corollaire 3.6.15, les groupoïdes de Galois locaux G_0, G_1, G_∞, les isomorphismes galoisiens

$$\Gamma_{0,\widetilde{z_0}} : \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_0}\left(\widetilde{z_0}\right)$$

pour tout $\widetilde{z_0} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$ et les

$$\Gamma_{\infty,\widetilde{z_\infty}} : \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right) \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}\right) \rightsquigarrow \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{z_\infty}\right)$$

pour tout $\widetilde{z_\infty} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$ sont des éléments du groupoïde de Galois G de la catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$.

Théorème 3.6.20. *Les groupoïdes de Galois locaux* G_0, G_1, G_∞ *et les* $\Gamma_{0,\widetilde{z_0}}, \Gamma_{\infty,\widetilde{z_\infty}}$ *pour tous* $\widetilde{z_0} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$*,* $\widetilde{z_\infty} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$ *engendrent un sous-groupoïde* H *qui est Zariski-dense dans le groupoïde de Galois* G *de* $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$*.*

Démonstration. Pour montrer cela, on utilise le critère de densité donné par le Théorème 3.2.37. Soit $\mathcal{X} = \left(A_0, A_1, A_\infty, \widetilde{M_0}, \widetilde{M_\infty}\right)$ un objet de $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$. Pour chaque objet $\omega_0, \omega_1^{(\widetilde{c})}, \omega_\infty$, $\widetilde{c} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \left(\widetilde{E_0} \cup \widetilde{E_\infty} \cup \{\widetilde{1}\}\right)$ du groupoïde G on choisit une droite

$$D_i \subset \omega_i(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^n \quad \text{pour} \quad i = 0, \infty \quad \text{et} \quad \widetilde{D_1}^{(\widetilde{c})} \subset \omega_1^{(\widetilde{c})}(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^n.$$

On suppose que cette famille de droites est globalement stable par $H(\mathcal{X})$. Il faut montrer que cette famille de droites est aussi laissée globalement stable par $G(\mathcal{X})$.

Notons $\rho : G \to \mathrm{GL}(\omega(\mathcal{X}))$ la représentation de G correspondant à $\mathcal{X}$ par dualité tannakienne.

La restriction $\rho_{|G_1} : G_1 \to \mathrm{GL}(\omega(\mathcal{X}))$ est la représentation correspondant à A_1 par dualité tannakienne pour la catégorie $\mathcal{P}^{(1)}$. Par hypothèse, les droites $\widetilde{D_1}^{(\widetilde{c})}$ sont globalement stables sous l'action de G_1 donc elles induisent une sous-représentation de dimension 1 de $\rho_{|G_1}$. Elle correspond par dualité tannakienne à un sous-objet de rang 1 de A_1 dans $\mathcal{P}^{(1)}$. Ce sous-objet est la donnée de $a_1 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(1)}\right)$ de rang 1 et d'un monomorphisme $\widetilde{d_1} : a_1 \to A_1$. Ainsi, on obtient $a_1 \in \mathbb{C}^\star$ et $\widetilde{d_1}$ est une matrice colonne ayant pour coefficients des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$ telle que

$$\phi_p\left(\widetilde{d_1}\right) a_1 = A_1 \widetilde{d_1} \tag{3.28}$$

et

$$\omega_1^{(\widetilde{c})}\left(\widetilde{d_1}\right)\mathbb{C} = \widetilde{d_1}(\widetilde{c})\,\mathbb{C} = \widetilde{D_1}^{(\widetilde{c})}.$$

La restriction $\rho_{|G_0} : G_0 \to \mathrm{GL}(\omega(\mathcal{X}))$ est la représentation correspondant à A_0 par dualité tannakienne pour la catégorie $\mathcal{P}^{(0)}$. Par hypothèse, la droite D_0 est stable sous l'action de G_0 donc elle induit une sous-représentation de dimension 1 de $\rho_{|G_0}$. Elle correspond par dualité tannakienne à un sous-objet de rang 1 de A_0 dans $\mathcal{P}^{(0)}$. Ce sous-objet est la donnée de $a_0 \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{P}^{(0)}\right)$ de rang 1 et d'un monomorphisme $d_0 : a_0 \to A_0$. Ainsi, on obtient $a_0 \in \mathbb{C}^\star$ et $d_0 \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$d_0 a_0 = A_0 d_0 \tag{3.29}$$

et

$$\mathbb{C} d_0 = D_0.$$

On procède de même pour la catégorie $\mathcal{P}^{(\infty)}$ et pour le groupoïde G_∞. On obtient

$$d_\infty a_\infty = A_\infty d_\infty \tag{3.30}$$

avec $a_\infty \in \mathbb{C}^\star$, $d_\infty \in \mathbb{C}^n$ et

$$\mathbb{C} d_\infty = D_\infty.$$

Pour tout $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$, la stabilité sous $\Gamma_{0,\widetilde{a}}$ de la famille de droites signifie que l'on a $\Gamma_{0,\widetilde{a}}(\mathcal{X}) : \omega_0(\mathcal{X}) \to \omega_1^{(\widetilde{a})}(\mathcal{X})$ qui satisfait $\Gamma_{0,\widetilde{a}}(\mathcal{X}) D_0 = \widetilde{D_1}^{(\widetilde{a})}$, c'est-à-dire

$$\widetilde{M_0}(\widetilde{a}) D_0 = \widetilde{D_1}^{(\widetilde{a})}.$$

Ainsi, pour tout $\widetilde{a} \in \Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}$, il existe $\widetilde{m_0}(\widetilde{a}) \in \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{M_0}(\widetilde{a}) d_0 = \widetilde{m_0}(\widetilde{a}) \widetilde{d_1}(\widetilde{a})$. On obtient donc une fonction $\widetilde{m_0} : \Sigma_0 \to \mathbb{C}$ telle que

$$\widetilde{M_0} d_0 = \widetilde{m_0} \widetilde{d_1}. \tag{3.31}$$

De même, pour tout $\widetilde{b} \in \Sigma_\infty \setminus \widetilde{E_\infty}$, $D_\infty = \widetilde{M_\infty}\left(\widetilde{b}\right)^{-1} D_1^{\left(\widetilde{b}\right)}$. Il existe donc une fonction $\widetilde{m_\infty} : \Sigma_\infty \to \mathbb{C}$ telle que

$$\widetilde{M_\infty} d_\infty = \widetilde{m_\infty} \widetilde{d_1}. \tag{3.32}$$

On obtient que

- $\mathcal{X}' := (a_0, a_1, a_\infty, \widetilde{m_0}, \widetilde{m_\infty})$ est un objet de $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$. En effet, l'égalité (3.31) implique que $\widetilde{m_0}$ est une combinaison linéaire, à coefficients dans les polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$, des coefficients de $\widetilde{M_0}$. La fonction $\widetilde{m_0}$ est donc méromorphe sur Σ_0. De l'égalité $\phi_p\left(\widetilde{M_0}\right) = A_1 \widetilde{M_0} A_0^{-1}$, on a

  $$\phi_p\left(\widetilde{M_0}\right) d_0 = A_1 \widetilde{M_0} A_0^{-1} d_0.$$

  Les égalités (3.28), (3.29) impliquent donc

  $$\phi_p(\widetilde{m_0}) = a_1 \widetilde{m_0} a_0^{-1}.$$

  Le même argument montre que $\widetilde{m_\infty}$ est méromorphe sur Σ_∞ et vérifie

  $$\phi_p(\widetilde{m_\infty}) = a_1 \widetilde{m_\infty} a_\infty^{-1}.$$

  De plus, les singularités sont telles que $S(\widetilde{m_i}) \subset \widetilde{E_i}$, $i = 0, \infty$ (pour plus de détails voir la remarque qui suit). Afin de montrer que $\mathcal{X}'$ est un objet de $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$, il reste à montrer qu'il existe $\widetilde{w_1} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$, $w_0 \in \mathcal{M}(D)$ et $w_\infty \in \mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)$ non nuls tels que

  $$\begin{cases} \widetilde{w_1} \widetilde{m_0} = \pi^\star w_0 \\ \widetilde{w_1} \widetilde{m_\infty} = \pi^\star w_\infty . \end{cases}$$

  Puisque $\mathcal{X}$ un objet de la catégorie $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$, il existe

  $$\widetilde{W_1} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)\right),\ W_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(D)),\ W_\infty \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{M}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}\right)\right)$$

  tels que $\widetilde{W_1} \widetilde{M_0} = \pi^\star W_0$ et $\widetilde{W_1} \widetilde{M_\infty} = \pi^\star W_\infty$. Ainsi,

  $$\begin{cases} \pi^\star W_0 d_0 = \widetilde{W_1} \widetilde{M_0} d_0 = \widetilde{m_0} \widetilde{W_1} \widetilde{d_1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \\ \pi^\star W_\infty d_\infty = \widetilde{W_1} \widetilde{M_\infty} d_\infty = \widetilde{m_\infty} \widetilde{W_1} \widetilde{d_1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_\infty . \end{cases}$$

Un coefficient non nul de la matrice colonne $\widetilde{W_1}\widetilde{d_1}$ satisfait les conditions requises pour être $\widetilde{w_1}$. En effet, on a bien $\widetilde{w_1} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathbb{C}^\star}\right)$ et l'égalité $\pi^\star W_0 d_0 = \widetilde{m_0}\widetilde{W_1}\widetilde{d_1}$ implique que w_0 est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des coefficients de W_0. La fonction w_0 est donc méromorphe sur D. Le même argument donne que w_∞ est méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D}$.

- $m = \left(d_0, \widetilde{d_1}, d_\infty\right) : \mathcal{X}' \rightsquigarrow \mathcal{X}$ est un morphisme de $\mathcal{C}_{E_0,E_\infty}$ puisque $d_0, d_\infty \in \mathbb{C}^n$, $\widetilde{d_1}$ a pour coefficients des polynômes de Laurent en $\widetilde{\ln}$ et

$$\begin{cases} \widetilde{d_1}\widetilde{m_0} = \widetilde{M_0}d_0 \\ \widetilde{d_1}\widetilde{m_\infty} = \widetilde{M_\infty}d_\infty \, . \end{cases}$$

La famille de droites, fixée par le sous-groupoïde H, est laissée globalement invariante par le groupoïde G puisque :

- pour tout $g_i \in \mathrm{Aut}^\otimes\left(\omega_{i|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$, $i = 0, \infty$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \omega_i\left(\mathcal{X}'\right) \arrow[r, "g_i(\mathcal{X}')"] \arrow[d, "\omega_i(m)=d_i"'] & \omega_i\left(\mathcal{X}'\right) \arrow[d, "\omega_i(m)=d_i"] \\ \omega_i\left(\mathcal{X}\right) \arrow[r, "g_i(\mathcal{X})"'] & \omega_i\left(\mathcal{X}\right) \end{tikzcd}$$

ainsi $g_i(\mathcal{X})\, d_i = d_i g_i(\mathcal{X}') = g_i(\mathcal{X}')\, d_i$. Puisque $g_i(\mathcal{X}') \in \mathbb{C}^\star$, on a $g_i(\mathcal{X})\, D_i = D_i$.

- pour tout $g_1 \in \mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_1^{(\widetilde{c_1})}{}_{|\langle\mathcal{X}\rangle}, \omega_1^{(\widetilde{c_2})}{}_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \omega_1^{(\widetilde{c_1})}\left(\mathcal{X}'\right) \arrow[r, "g_1(\mathcal{X}')"] \arrow[d, "\omega_1^{(\widetilde{c_1})}(m)=\widetilde{d_1}(\widetilde{c_1})"'] & \omega_1^{(\widetilde{c_2})}\left(\mathcal{X}'\right) \arrow[d, "\omega_1^{(\widetilde{c_2})}(m)=\widetilde{d_1}(\widetilde{c_2})"] \\ \omega_1^{(\widetilde{c_1})}\left(\mathcal{X}\right) \arrow[r, "g_1(\mathcal{X})"'] & \omega_1^{(\widetilde{c_2})}\left(\mathcal{X}\right) \end{tikzcd}$$

ainsi, $g_1(\mathcal{X})\, \widetilde{D_1}^{(\widetilde{c_1})} = \widetilde{D_1}^{(\widetilde{c_2})}$.

- pour tout $h_0 \in \mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_{0|\langle\mathcal{X}\rangle}, \omega_1^{(\widetilde{a})}{}_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$ et tout $h_\infty \in \mathrm{Iso}^\otimes\left(\omega_{\infty|\langle\mathcal{X}\rangle}, \omega_1^{(\widetilde{b})}{}_{|\langle\mathcal{X}\rangle}\right)$, on montre de même que $h_0(\mathcal{X})\, D_0 = \widetilde{D_1}^{(\widetilde{a})}$ et $h_\infty(\mathcal{X})\, D_\infty = \widetilde{D_1}^{(\widetilde{b})}$.

□

Remarque 3.6.21. On s'intéresse aux singularités de $\widetilde{m_0}$. Par l'égalité (3.31),

$$\widetilde{m_0}^{-1} d_0 = \widetilde{M_0}^{-1}\widetilde{d_1},$$

on obtient donc

$$\text{Pôles}\left(\widetilde{m_0}^{-1}\right) \subset \left(\text{Pôles}\left(\widetilde{M_0}^{-1}\right) \cup \text{Pôles}\left(\widetilde{d_1}\right)\right) \cap \Sigma_0 \subset \widetilde{E_0}$$

car Pôles $\left(\widetilde{d_1}\right) \subset \{\widetilde{1}\}$. Aussi, Zéros $\left(\widetilde{m_0}^{-1}\right) \subset \widetilde{E_0}$ car si $\widetilde{\alpha} \in$ Zéros $\left(\widetilde{m_0}^{-1}\right) \cap \left(\Sigma_0 \setminus \widetilde{E_0}\right)$ alors $\widetilde{M_0}\left(\widetilde{\alpha}\right)^{-1}$ est bien définie et inversible mais $0 = \widetilde{M_0}\left(\widetilde{\alpha}\right)^{-1} \widetilde{d_1}\left(\widetilde{\alpha}\right)$ or $\widetilde{d_1}\left(\widetilde{\alpha}\right) \neq 0$ (car $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathbb{C}^\star} \setminus \left(\widetilde{E_0} \cup \widetilde{E_\infty} \cup \{\widetilde{1}\}\right)$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \widetilde{d_1}\left(\widetilde{\alpha}\right) = D_1^{(\widetilde{\alpha})} \neq 0$) ce qui est absurde. Ainsi,

$$S\left(\widetilde{m_0}\right) \subset \widetilde{E_0}.$$

Le même argument montre que

$$S\left(\widetilde{m_\infty}\right) \subset \widetilde{E_\infty}.$$

Remarque 3.6.22. Dans le cas particulier $A(0) = A(1) = A(\infty) = I_n$, on obtient à nouveau le théorème de densité dans le cas régulier, Théorème 3.6.19, puisque dans ce cas les groupoïdes de Galois locaux G_0, G_1, G_∞ sont triviaux.

Chapitre 4

Algorithme pour reconnaître les systèmes singuliers réguliers

In this chapter, we give an effective characterisation of Mahler systems that are regular singular at 0, that is, systems which are equivalent to constant ones. In particular, it gives an effective characterisation of Mahler systems to which the analog of the Schlesinger's density theorem applies, Theorem 3.6.20. In Section 4.1, we give characterisations of regular singular Mahler systems, they are similar to those obtained for the differential equations or the q-difference equations, recalled in Section 1.3. We also make the link between the notion of regular singularity used in this chapter and the one used in the previous chapters.

From Section 4.2, we present a joint work with Colin Faverjon, see [FP21]. In Section 4.2, we explain the main ideas. In Section 4.3, we study the solutions of the equations satisfied by the columns of a gauge transformation : we compute some bounds for their valuations and we find some admissible ramifications. In Section 4.4, we exhibit some linear equations which must be satisfied by the first coefficients of such solutions and we consider the vector space of solutions of such linear equations. Then, we prove our main theorem (Theorem 4.4.11). We describe the main algorithm in Section 4.5 and we compute a bound for its complexity. Section 4.6 is devoted to the study of some examples. Finally, in Section 4.7 we discuss some open problems.

4.1 On the regular singular Mahler systems

4.1.1 A characterisation of the regular singularity at 0

We consider the Mahler system

$$\phi_p(Y) = AY \tag{4.1}$$

with $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z\}))$.

Proposition 4.1.1. *A Mahler system of the form (4.1) is regular singular at 0 if there exists $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}((z)))$ such that $\phi_p(T)^{-1}AT$ is a constant matrix.*

Proof. From Section 3.1.1, we infer that the Mahler system (4.1) is regular singular at 0 if and only if there exists $T_c \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}(\{z\}))$ such that $\phi_p(T_c)^{-1}AT_c$ is a constant matrix. Let $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}((z)))$ be such that $\phi_p(T)^{-1}AT$ is a constant matrix, denoted by $C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. We have to prove that the entries of T are convergent. We denote by B the matrix A^{-1} and by τ_0 (respectively β_0) the valuation at 0 of T (respectively of B). Thus,

$$T = B\phi_p(T)C \tag{4.2}$$

and if

$$T(z) := \sum_{l \geq \tau_0} T_l z^l, \quad B(z) := \sum_{l \geq \beta_0} B_l z^l \quad \text{with} \quad T_l, B_l \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

then for all $n \geq \tau_0$,

$$T_n = \left(\sum_{(k,l):\, k+pl=n} B_k T_l \right) C.$$

Let $\mu := \lceil -\beta_0/(p-1) \rceil$. If $n > \mu$, then the T_l which are taken into acccount in the right-hand side of the previous equation are the ones for which $l < n$. Thus, for $n > \mu$, we have

$$T_n = \left(\sum_{l=\tau_0}^{n-1} B_{n-pl} T_l \right) C \tag{4.3}$$

where $B_k := 0$ if $k < \beta_0$.

Without loss of generality, we can assume that $\tau_0 = 0$. Indeed, if $U := z^{-\tau_0}T$ and $D := z^{(p-1)\tau_0}B$ then, from Equation (4.2),

$$U = D\phi_p(U)C\,,$$

with $U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}((z)))$ such that its valuation at 0 is 0. Moreover, the system $\phi_p(Y) = BY$ is regular singular at 0 if and only if $\phi_p(Y) = DY$ is regular singular at 0.

From Equation (4.2), $\beta_0 \leq (1-p)\tau_0$ and since $\tau_0 = 0$, $\beta_0 \leq 0$. Let $t_n := ||T_n||$, $b_n := ||B_n||$ and $c := ||C||$. The function $\sum\limits_{n \geq 0} b_n z^n$ is holomorphic at 0 so there exist $K \in \mathbb{R}^+$ and $\rho \geq 1$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, $b_n = |b_n| \leq K\rho^n$. Thus there exists $M \in \mathbb{R}^+$, $M \geq K$, such that for all $n \geq \beta_0$,

$$b_n = |b_n| \leq M\rho^n\,.$$

We introduce the sequence $\left(\overline{t_n}\right)_{n \geq 0}$ defined by

$$\begin{cases} \overline{t_0} := t_0, \ldots, \overline{t_\mu} := t_\mu \\ \forall n > \mu, \quad \overline{t_n} = cM \sum\limits_{l=0}^{n-1} \rho^{n-l}\overline{t_l}\,. \end{cases}$$

Thanks to the equation (4.3) and the fact that $\rho^{n-pl} \leq \rho^{n-l}$ if $l \geq 0$, with an immediate induction we deduce that $0 \leq t_n \leq \overline{t_n}$ for all $n \geq 0$. Therefore, in order to prove that the entries of T are convergent, it is enough to prove that $\overline{s}(z) := \sum\limits_{n\geq 0} \overline{t_n} z^n$ is convergent. We have

$$\begin{aligned}
\overline{s}(z) &= \sum_{n=0}^{\mu} t_n z^n + cM \sum_{n=\mu+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \rho^{n-l} \overline{t_l} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\mu} t_n z^n + cM \sum_{l=0}^{\mu} \sum_{n=\mu+1}^{+\infty} \rho^{n-l} \overline{t_l} z^n + cM \sum_{l=\mu+1}^{+\infty} \sum_{n=l+1}^{+\infty} \rho^{n-l} \overline{t_l} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\mu} t_n z^n + cM \sum_{l=0}^{\mu} (\overline{t_l} z^l \underbrace{\sum_{n=\mu-l+1}^{+\infty} \rho^n z^n}_{= \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n z^n - \sum_{n=1}^{\mu-l} \rho^n z^n}) + cM \left(\sum_{l=\mu+1}^{+\infty} \overline{t_l} z^l \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n z^n \right) \\
&= f(z) + cMg(z)\overline{s}(z)
\end{aligned}$$

where $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\mu} t_n z^n - cM \sum\limits_{l=0}^{\mu} \sum\limits_{n=1}^{\mu-l} \overline{t_l} \rho^n z^{n+l}$ and $g(z) := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \rho^n z^n$ are holomorphic functions at 0. Therefore,

$$\overline{s}(z) = \frac{f(z)}{1 - cMg(z)}$$

and $\overline{s}(z)$ is the expression as a series around the center $z = 0$ of this holomorphic function. Thus, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n z^n$ has a nonzero radius of convergence. □

Corollary 4.1.2. *A Mahler system* (3.1) *is* regular singular at 0 *if and only if there exists* $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}((z)))$ *such that* $\phi_p(T)^{-1}AT$ *is a constant matrix.*

4.1.2 An extension of the definition of the regular singularity

In the previous section, we saw that the Mahler system (3.1) is *regular singular at* 0 if and only if there exists $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}((z)))$ such that $\phi_p(T)^{-1}AT$ is a constant matrix.

Here, we consider a new definition of the regular singularity, which is also used in the literature :

Definition 4.1.3. Let $\mathbf{K}$ be the field of Puiseux series with complex coefficients i.e. the field

$$\mathbf{K} := \bigcup_{d\in\mathbb{N}^\star} \mathbb{C}\left(\left(z^{1/d}\right)\right).$$

A Mahler system (3.1) is *Puiseux regular singular at* 0 if there exists $\Psi \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$ such that $\phi_p(\Psi)^{-1}A\Psi$ is a constant matrix.

Remark 4.1.4. The difference between this definition and the definition of regular singular systems at 0 is that, in this definition, we consider gauge transformations Ψ with entries in the field $\mathbf{K}$ instead of the field $\mathbb{C}((z))$. Of course, a Mahler system which is regular singular at 0 is also Puiseux regular singular at 0. However, the converse is false.

One can notice that the system (3.1), associated with the matrix A, is Puiseux regular singular at 0 if and only if there exists $d \in \mathbb{N}$ such that the system associated with the matrix $A\left(z^d\right)$ is regular singular at 0.

From [Roq20], a characterisation of the Puiseux regular singularity at 0 can be done with the solutions of the system. Let us give more details on this. Let $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ denote the field of Hahn series. The map ϕ_p naturally extends to matrices with entries in $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. In [Roq20], Roques proved that for every p-Mahler system there exists a matrix $\Psi \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ such that $\phi_p(\Psi)^{-1}A\Psi$ is a constant matrix. Thus, any Mahler system has a fundamental matrix of solutions of the form $\Psi\Theta$, where Ψ is a matrix with entries in $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ and Θ is a fundamental matrix of solutions of a constant system. Among them, the Puiseux regular singular systems are those for which the matrix Ψ belongs to $\mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$. Therefore, we have the following result.

Proposition 4.1.5. *A Mahler system is Puiseux regular singular at* 0 *if and only if it has a fundamental matrix of solutions of the form* $\Psi\Theta$ *where* Ψ *is a matrix with entries in* $\mathbf{K}$ *and* Θ *is a fundamental matrix of solutions of a constant system.*

For any constant Mahler system $\phi_p(Y) = CY$, $C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, one can build a fundamental matrix of solutions using the functions

$$\ell(z) := \log\log(z)/\log(p) \quad \text{and} \quad e_c(z) := \log(z)^{\log(c)/\log(p)}$$

with $c \in \mathbb{C}^\star$ in the set of eigenvalues of C (see [Roq18]). For example, if log denotes the principal value (i.e. it is defined in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$) then one can see that $\phi_p(\ell) = \ell + 1$ and $\phi_p(e_c) = ce_c$ on the sector

$$\{z \in \mathbb{C}^\star \mid \arg(z) \in]0, \pi/p[\}.$$

We want to study the growth of the solutions at 0 of a Mahler system which is Puiseux regular singular at 0.

For all $\epsilon > 0$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $|\alpha - \beta| < 2\pi$, we write

$$S_{\alpha,\beta,\epsilon} := \{z \in \mathbb{C}^\star \mid \arg(z) \in]\alpha, \beta[, |z| < \epsilon\}.$$

Definition 4.1.6. An analytic function f in an open set of the form $S := S_{\alpha,\beta,\epsilon}$ is of *moderate growth on* S if there exist $N \in \mathbb{Z}$ and a positive real number c such that $|f(z)| \leq c|z|^N$ on S. We say that the Mahler system

$$\phi_p(Y) = AY \quad \text{with} \quad A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}\{z\}). \tag{4.4}$$

has solutions of *moderate growth at* 0 if for all $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisfying $|\alpha - \beta| < 2\pi$, there exists $\epsilon > 0$ such that the system (4.4) has a fundamental matrix of solutions whose entries have moderate growth on $S_{\alpha,\beta,\epsilon}$.

Example 4.1.7. A constant Mahler system has solutions of moderate growth at 0.

Theorem 4.1.8. *We consider the Mahler system*

$$\phi_p(Y) = AY \quad \textit{with} \quad A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}\{z\}). \tag{4.5}$$

The following assumptions are equivalent.

1. *The Mahler system* (4.5) *is Puiseux regular singular at* 0.

2. *The Mahler system* (4.5) *has solutions of moderate growth at* 0.

Proof. It is a consequence of Corollary 4.1.2 and Proposition 4.1.5. Indeed, from these two results, the Mahler system (4.5) is Puiseux regular singular at 0 if and only if its solutions are of the form $\Psi\Theta$ where Θ is a fundamental matrix of solutions of a constant system and there exist $N \in \mathbb{N}$ such that the entries of $\Psi\left(z^N\right)$ are in $\mathbb{C}\left(\{z\}\right)$. These solutions are of moderate growth at 0. If the Mahler system (4.5) is not Puiseux regular singular at 0, there are Hahn series which are not Puiseux series in the fundamental matrices of solutions. Thus, the Mahler system (4.5) does not have solutions of moderate growth at 0. □

4.2 Introduction of the problem

This part is a joint work with Colin Faverjon. We describe an algorithm which determines whether or not a Mahler system is Puiseux regular singular at 0. So, from now on, in order to simplify the teminology, we call "regular singular at 0" systems which are "Puiseux regular singular at 0".

We work with the computable field $\overline{\mathbb{Q}}$, instead of $\mathbb{C}$, because we want to obtain algorithms and to study their complexity. Thus, from now on, $\mathbf{K}$ is the field of Puiseux series with algebraic coefficients i.e. the field

$$\mathbf{K} := \bigcup_{d\in\mathbb{N}^\star} \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right).$$

For an integer $p \geq 2$, we write

$$\begin{array}{cccc} \phi_p : & \mathbf{K} & \to & \mathbf{K} \\ & f(z) & \mapsto & f\left(z^p\right) \end{array}$$

and this map naturally extends to matrices with entries in $\mathbf{K}$. We consider Mahler systems of the form

$$\phi_p\left(Y\right) = AY, \qquad A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\left(z\right)\right). \tag{4.6}$$

As explained previously, in this part we use the following definition of Mahler systems which are regular singular at 0.

Definition 4.2.1. A Mahler system (4.6) is *regular singular at* 0, or for short *regular singular*, if there exists $\Psi \in \mathrm{GL}_m\left(\mathbf{K}\right)$ such that $\phi_p(\Psi)^{-1}A\Psi$ is a constant matrix.

Definition 4.2.2. Let $p \geq 2$ be an integer, and let $A, B \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$. Let $\mathbf{k}$ be a subfield of $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, the field of Hahn series. The p-Mahler systems

$$\phi_p(Y) = AY \quad \text{and} \quad \phi_p(Y) = BY$$

are said to be $\mathbf{k}$-*equivalent* if there exists a matrix $\Psi \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k})$ such that

$$\phi_p(\Psi)B = A\Psi\,.$$

In that case, the matrix Ψ is called an *associated gauge transformation.*

We recall that this choice for the equivalence class ensures that if $\mathcal{Y}$ is such that $\phi_p(\mathcal{Y}) = A\mathcal{Y}$ then $\phi_p(\Psi^{-1}\mathcal{Y}) = B(\Psi^{-1}\mathcal{Y})$. With this definition, the regular singular systems are the ones that are $\mathbf{K}$-equivalent to constant systems.

A Mahler system is strictly Fuchsian at 0 if the entries of A are analytic functions at 0 and $A(0) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}})$. To say it differently, a system is strictly Fuchsian at 0 if 0 is not a singularity of this system. It follows from [Roq18, Prop. 34] that systems which are strictly Fuchsian at 0 are regular singular at 0. Since the p-Mahler system associated with some matrix A and the p-Mahler system associated with the matrix $z^\nu A$ for some $\nu \in \mathbb{Z}$ are $\mathbf{K}$-equivalent, there exist systems which are regular singular at 0 but are not strictly Fuchsian at 0. Note that not all Mahler systems are regular singular at 0. For example, the system

$$\phi_2(Y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{-1}{z} \end{pmatrix} Y$$

associated with the generating series of the Rudin-Shapiro sequence is not regular singular at 0 (see Section 4.6.3). The main result of this paper reads as follows.

Theorem 4.2.3. *Let $A \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ and $p \geq 2$. There exists an algorithm which determines whether or not the Mahler system (4.6) is regular singular at 0. This is done by computing the dimension of an explicit $\overline{\mathbb{Q}}$-vector space. If the system is regular singular at 0 the algorithm computes a constant matrix to which the system is equivalent and a truncation at an arbitrary order of the Puiseux expansion of an associated gauge transformation.*

In [CDDM18], the authors built an algorithm to decide whether or not a linear homogeneous Mahler equation has a complete basis of solutions in $\mathbf{K}$. If it is the case, the associated Mahler system is regular singular at 0 and $\mathbf{K}$-equivalent to the identity matrix. From this point of view, Theorem 4.2.3 can be seen as a generalisation of the results of [CDDM18]. Our algorithm is implemented in Python 3 [1]. Bounds for the complexity are given in Section 4.5.

Remark 4.2.4. Thanks to the algorithms which determine if a q-difference system is regular singular at 0, see for example [BBP08], and thanks to Theorem 4.2.3, we can test if the Mahler system (4.6) is regular singular at 0, 1 and ∞. Indeed, using the change of variables $z = e^u$ one can test the regular singularity at 1 using the theory of q-difference systems. Furthermore, one can know if the Mahler system (4.6) is regular singular at ∞ by applying Theorem 4.2.3 to the system $A(1/z)$.

We briefly present our strategy of proof. Assume that the Mahler system is $\mathbf{K}$-equivalent to a constant system $\phi_p(Y) = \Lambda Y$ with an associated gauge transformation $\Psi \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$. We can suppose that Λ is a Jordan matrix. Thus, using the relation $\phi_p(\Psi)\Lambda = A\Psi$, the columns $\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_m$ of Ψ are solutions of equations of the form

$$\lambda_i \phi_p(\boldsymbol{\psi}_i) + \epsilon_i \phi_p(\boldsymbol{\psi}_{i-1}) = A\boldsymbol{\psi}_i \tag{4.7}$$

1. The implemented algorithm is available at the following URL address : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03147365/file/AlgoRegularSingularMahlerSyst.py.

where $\epsilon_i \in \{0,1\}$, λ_i is an eigenvalue of Λ and $\boldsymbol{\psi}_0 := 0$. Thus, to prove that some Mahler system is regular singular at 0, we will have to solve equations of the form (4.7). Section 4.3 is devoted to the study of the solutions of such equations. We compute some bounds for their valuations and we find some admissible ramification. In Section 4.4, we exhibit some linear equations which must be satisfied by the first coefficients of such solutions and we consider the vector space of solutions of such linear equations. Then, we prove our main theorem (Theorem 4.4.11) which states that the system is regular singular at 0 if and only if the dimension of this vector space is precisely m. We describe the algorithm of Theorem 4.2.3 in Section 4.5 and we compute a bound for its complexity. Section 4.6 is devoted to the study of some examples. Finally, in Section 4.7 we discuss some open problems.

Notation. We let $v_0 : \overline{\mathbb{Q}}[[z]] \mapsto \mathbb{Z} \cap \{\infty\}$ denote the valuation at $z = 0$: for $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, $v_0(f)$ is the supremum of the integers $v \in \mathbb{N}$ such that f belongs to the ideal $z^v\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$. It extends uniquely as a valuation from $\mathbf{K}$ to $\mathbb{Q}$. We also extend it to the set of matrices with entries in $\mathbf{K}$ where $v_0(U)$ denotes the minimum of the valuations at 0 of the entries of a matrix U. Let f be a polynomial. We let $\deg(f)$ denote the degree of f. If M is a matrix with entries in $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, and f is the least common multiple of the denominators of the entries of M, we define $\widetilde{M} := fM$ and

$$\deg(M) := \max\left(\deg(f), \deg\left(\widetilde{M}\right)\right).$$

Our bounds for the complexity of the algorithms presented here are given in terms of arithmetical operations in $\overline{\mathbb{Q}}$. Given $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ we use the classical Landau notation $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ if there exists a positive real number κ such that $f(n) \leq \kappa g(n)$ for every integer n large enough. Given a $n > 0$, we let $\mathrm{M}(n)$ denote the complexity of the product of two polynomials of degree at most n, and $\mathrm{MM}(n)$ denote the complexity of the product of two matrices with at most n rows and n columns.

For the sake of clarity, we shall denote by Roman capital letters $A, B, C, \ldots$ matrices whose entries are effectively known and by Greek capital letters $\Psi, \Theta, \Lambda, \ldots$ the other matrices. While matrices are denoted by capital letters $\Psi, \Theta, U, \ldots$, the columns of these matrices should be denoted by bold lowercase letters $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \ldots$.

4.3 Index of ramification and valuation at 0 of a gauge transformation

Assume that the Mahler system (4.6) is regular singular at 0, that is, it is $\mathbf{K}$-equivalent to a constant system $\phi_p(Y) = \Lambda Y$ with an associated gauge transformation Ψ. We can assume that Λ is a Jordan matrix. Thus, the columns $\boldsymbol{\psi}_i$ of Ψ satisfy Equation (4.7). This section is devoted to the study of the solutions of such systems. Precisely, consider a Puiseux series $\boldsymbol{g} \in \mathbf{K}^m$ and some nonzero algebraic number $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$. We study the solutions $\boldsymbol{f} \in \mathbf{K}^m$ of the system

$$\lambda\phi_p(\boldsymbol{f}) + \phi_p(\boldsymbol{g}) = A\boldsymbol{f}\,. \tag{4.8}$$

We compute some integer d such that any solution of this equation belongs to $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$ assuming that $\boldsymbol{g}$ also belongs to $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$. Then, this integer d being fixed, we exhibit an integer ν_d such that $v_0(\boldsymbol{f})$, the minimum of the valuations of the entries of the vector $\boldsymbol{f}$, is at least ν_d/d assuming that $v_0(\boldsymbol{g}) \geq \nu_d/d$.

4.3.1 The cyclic vector lemma

In [CDDM18], the authors developed a method to solve linear Mahler equations that is equations of the form

$$q_0 y + q_1\phi_p(y) + q_2\phi_p^2(y) + \cdots + q_{m-1}\phi_p^{m-1}(y) - \phi_p^m(y) = 0\,,$$

with $q_0, \ldots, q_{m-1} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$. Actually, one can use these results to solve linear systems of the form (4.8). In order to do that, we use a result known as the cyclic vector lemma. For the sake of completeness, we develop here a proof of this result.

Theorem 4.3.1 (cyclic vector lemma)**.** *Any Mahler system* (4.6) *is* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$*-equivalent to a companion matrix system i.e. there exist* $P \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$ *and* $q_0, \ldots, q_{m-1} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ *such that* $\phi_p(P)AP^{-1} = A_{\mathrm{comp}}$ *where*

$$A_{\mathrm{comp}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ q_0 & \cdots & \cdots & \cdots & q_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Proof. We adapt the proof of Birkhoff given in [Bir30, §1] and of Sauloy given in [Sau00, Annexe B.2]. In order to build such a matrix P, we build its rows $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$. These rows must be linearly independent and must satisfy

$$\phi_p\left(\mathbf{r}_i\right) A = \mathbf{r}_{i+1} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq m-1. \tag{4.10}$$

Therefore, we are looking for a vector $\mathbf{r} \in \mathbb{C}(z)^m$ such that $\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{i+1} := \phi_p\left(\mathbf{r}_i\right) A$, $1 \leq i \leq m-1$ form a basis of $\mathbb{C}(z)^m$. For this purpose, we choose a $z_0 \in \mathbb{C}^\star$ not a root of unity such that $A\left(z_0\right), \ldots, A\left(z_0^{p^{m-2}}\right) \in \mathrm{GL}_m\left(\mathbb{C}\right)$ (such a z_0 exists because the matrix A has finitely many singularities). Now, by polynomial interpolation, since $z_0, z_0^p, \ldots, z_0^{p^{m-1}}$ are all different, we can choose $\mathbf{r} \in \mathbb{C}(z)^m$ such that

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{r}(z_0) & = & \boldsymbol{e}_1 \\ \mathbf{r}(z_0^p) & = & \boldsymbol{e}_2 A(z_0)^{-1} \\ & \vdots & \\ \mathbf{r}(z_0^{p^{m-1}}) & = & \boldsymbol{e}_m A(z_0)^{-1} \ldots A\left(z_0^{p^{m-2}}\right)^{-1} \end{array}\right. \tag{4.11}$$

where $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ is the canonical basis of $\mathbb{C}(z)^m$. Write $\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}$ and define recursively

$$\mathbf{r}_{i+1} := \phi_p\left(\mathbf{r}_i\right) A, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

By construction,

$$\mathbf{r}_i(z_0) = \boldsymbol{e}_i\,.$$

The matrix P, whose rows are $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_m$, satisfies $P(z_0) = \mathrm{I}_m$. Thus, $P \in \mathrm{GL}_m\left(\mathbb{C}(z)\right)$. Write

$$(q_0,\dots,q_{m-1}) := \phi_p(\mathbf{r}_m)AP^{-1}\,.$$

Then $A_{\mathrm{comp}} = \phi_p(P)AP^{-1}$ is a companion matrix of the form (4.9). □

Remark 4.3.2. A different choice for z_0, for the basis $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m$ and a different rational interpolation in the proof of Theorem 4.3.1 would lead to a different matrix P and different rational functions $q_0,\dots,q_{m-1}$. However, the different companion matrices obtained after this process, with these different choices, are $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-equivalent. Actually, any companion matrix system equivalent to (4.6) can be obtained by this process. Indeed, assume that $P \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ is such that $\phi_p(P)AP^{-1}$ is a companion matrix. Let z_0 be chosen as in the proof of Theorem 4.3.1 with the additional assumption that P is well defined and nonsingular at z_0. We now let $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m$ denote the rows of $P(z_0)$, instead of the canonical basis. Let $\mathbf{r}$ denote the first row of P. Since $\phi_p(P)AP^{-1}$ is a companion matrix, $\mathbf{r}$ satisfies (4.11). Then, let $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_m$ be defined from $\mathbf{r}$ and A as in the proof of Theorem 4.3.1. One easily checks that $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_m$ are the rows of P.

4.3.2 Ramification indexes of vector solutions of Mahler systems

We let

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{N} \mid 1 \leq d \leq p^m - 1\,, \gcd(d,p) = 1\} \subset \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Herebelow, it is a lemma about the ramifications of the solutions of systems of the form (4.8).

Lemma 4.3.3. *Let $A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$.*

1. *There exists an integer $d \in \mathcal{D}$ such that for any $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ and $\boldsymbol{f} \in \mathbf{K}^m$ satisfying*
$$\lambda\phi_p(\boldsymbol{f}) = A\boldsymbol{f} \tag{4.13}$$
we have $\boldsymbol{f} \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$.
2. *Let d be an integer obtained previously, in 1. If $\boldsymbol{g} \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))^m$, $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ and $\boldsymbol{f} \in \mathbf{K}^m$ satisfy*
$$\phi_p(\boldsymbol{f})\lambda + \phi_p(\boldsymbol{g}) = A\boldsymbol{f} \tag{4.14}$$
then $\boldsymbol{f} \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))^m$.

Proof. By Theorem 4.3.1, there exists $P \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ such that $A_{\mathrm{comp}} = \phi_p(P)AP^{-1}$ is a companion matrix, that is,

$$A_{\mathrm{comp}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ q_0 & \cdots & \cdots & \cdots & q_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{where } q_0,\dots,q_{m-1} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,. \tag{4.15}$$

We let $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \lambda$ be as in the lemma. We have

$$\lambda\phi_p(P\boldsymbol{f}) = A_{\text{comp}}P\boldsymbol{f} \quad \text{and} \quad \phi_p(P\boldsymbol{f})\lambda + \phi_p(P)\boldsymbol{g} = A_{\text{comp}}P\boldsymbol{f}$$

so, without loss of generality, we replace $P\boldsymbol{f}$ with $\boldsymbol{f}$ and $\phi_p(P)\boldsymbol{g}$ with $\boldsymbol{g}$, which does not modify the ramification index, and we assume that $A = A_{\text{comp}}$. Let $f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{K}$ and $g_1, \ldots, g_m \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$ be the entries of $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$ respectively. Since A is a companion matrix, from Equalities (4.13) and (4.14) we have respectively for every $i \in \{1, \ldots, m-1\}$,

$$f_{i+1} = \lambda\phi_p(f_i) = \cdots = \lambda^i\phi_p^i(f_1) \tag{4.16}$$

and

$$f_{i+1} = \phi_p(g_i) + \lambda\phi_p(f_i) = \cdots = \lambda^i\phi_p^i(f_1) + \sum_{j=1}^{i}\lambda^{j-1}\phi_p^j(g_{i-j+1}). \tag{4.17}$$

First, let us prove the point 1. From (4.16), in order to prove that $\boldsymbol{f} \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$, it is enough to prove that $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$. It follows from (4.16) and the last row of the system (4.13) that f_1 is a solution of the Mahler equation

$$q_0y + \lambda q_1\phi_p(y) + \cdots + \lambda^{m-1}q_{m-1}\phi_p^{m-1}(y) - \lambda^m\phi_p^m(y) = 0. \tag{4.18}$$

Let $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^2$ denote the *lower hull* of the set of pairs $(p^i, v_0(\lambda^i q_i))$, $0 \leq i \leq m$, with $q_m := 1$. Let $d \in \mathbb{N}^\star$ be the least common multiple of the denominators of the slopes of $\mathcal{H}$ which are coprime with p. If there are no such denominators we write $d := 1$. Since $v_0(\lambda^i q_i) = v_0(q_i)$, this integer d does not depend on λ. From [CDDM18, Prop. 2.19], $d \in \mathcal{D}$ and any solution $y \in \mathbf{K}$ of (4.18) belongs to $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$. Therefore, $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$.

Now, we fix such an integer d and we prove the point 2. From (4.17), it is enough to prove that $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$. It follows from (4.17) and the last row of the system (4.14) that we have

$$q_0f_1 + \lambda q_1\phi_p(f_1) + \cdots + \lambda^{m-1}q_{m-1}\phi_p^{m-1}(f_1) - \lambda^m\phi_p^m(f_1) = g_0, \tag{4.19}$$

where $g_0 \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$ is a $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-linear combination of the $\phi_p^j(g_i)$ for $i \in \{1, \ldots, m\}$ and $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. First, we prove that $f_1 \in \mathbf{K_{d,p}}$ where

$$\mathbf{K_{d,p}} := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/(dp^\ell)}\right)\right) \subset \mathbf{K}.$$

The function $f_1 \in \mathbf{K}$ can be written as

$$f_1 = h_0 + h_1$$

where $h_0 \in \mathbf{K_{d,p}}$ and none of the monomials in the Puiseux expansion of h_1 belongs to $\mathbf{K_{d,p}}$. Then, none of the monomials of the Puiseux expansion of $\phi_p^j(h_1)$, $j \in \{0, \ldots, m\}$, belongs to the field $\mathbf{K_{d,p}}$. Hence, since

$$g_0 \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right) \subset \mathbf{K_{d,p}},$$

it follows from (4.19) that h_1 is a solution of (4.18). From the proof of the point 1, $h_1 \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$. Thus we have $h_1 = 0$ and $f_1 = h_0 \in \mathbf{K_{d,p}}$. Let ℓ_0 be the smallest integer such that $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/(dp^{\ell_0})}\right)\right)$. We assume by contradiction that $\ell_0 > 0$. From (4.19), f_1 is a $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-linear combination of g_0 and the $\phi_p^j(f_1)$ for $j \in \{1, \ldots, m\}$, which are elements of $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/(dp^{\ell_0 - 1})}\right)\right)$, thus $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/(dp^{\ell_0 - 1})}\right)\right)$, a contradiction. As a consequence, $\ell_0 = 0$ and $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$ as wanted. □

Notation 4.3.4. We let $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ denote the set of integers $d \in \mathcal{D}$ satisfying the point 1 of Lemma 4.3.3.

Corollary 4.3.5. *The following three propositions are equivalent.*

(1) *The Mahler system* (4.6) *is regular singular at* 0*.*

(2) *The system* (4.6) *is* $\overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$*-equivalent to a constant system for some* $d \in \mathcal{D}_0$*.*

(3) *The system* (4.6) *is* $\overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$*-equivalent to a constant system for every* $d \in \mathcal{D}_0$*.*

Proof. We only have to prove that (1) implies (3). If the Mahler system (4.6) is regular singular at 0, we let

$$\Lambda := \phi_p(\Psi)^{-1} A \Psi \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}) \tag{4.20}$$

denote the constant matrix which is $\mathbf{K}$-equivalent to A, thanks to a gauge transformation Ψ. Without loss of generality, we assume that Λ is a Jordan matrix, that is,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} J_{s_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{s_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ are algebraic numbers and $J_{s_i}(\lambda_i)$ is the Jordan block of size s_i associated with the eigenvalue λ_i. Let

$$\boldsymbol{\psi}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{1,s_1}, \boldsymbol{\psi}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{2,s_2}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{r,1}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{r,s_r}$$

denote the columns of Ψ indexed according to the Jordan normal form of Λ. From (4.20), for any $i, j \in \mathbb{N}$ such that $1 \le i \le r$, $2 \le j \le s_i$ one has

$$\lambda_i \phi_p(\boldsymbol{\psi}_{i,1}) = A\boldsymbol{\psi}_{i,1}, \quad \text{and} \quad \lambda_i \phi_p(\boldsymbol{\psi}_{i,j}) + \phi_p(\boldsymbol{\psi}_{i,j-1}) = A\boldsymbol{\psi}_{i,j}. \tag{4.21}$$

Let $d \in \mathcal{D}_0$. We fix an integer $i \in \{1, \ldots, r\}$ and we prove by induction on $j \in \{1, \ldots, s_i\}$ that $\boldsymbol{\psi}_{i,j} \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$ for every $j \in \{1, \ldots, s_i\}$. From Equation (4.21) and Lemma 4.3.3, $\boldsymbol{\psi}_{i,1} \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$. Assume that $\boldsymbol{\psi}_{i,j-1} \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$. Equation (4.21) and Lemma 4.3.3 also give that $\boldsymbol{\psi}_{i,j} \in \overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)^m$, as desired. □

4.3.3 Valuations of vector solutions of Mahler systems

In this subsection, we fix an integer $d \in \mathcal{D}_0$ and we consider

$$\nu_d := \lceil dv_0(A)/(p-1) \rceil . \tag{4.22}$$

We study the valuation at 0 of the solutions of the equations (4.8).

Lemma 4.3.6. *Let $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ and let $\boldsymbol{g} \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))^m$ be a Laurent series whose valuation is not less than ν_d/d. The valuation at 0 of a solution $\boldsymbol{f} \in \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))^m$ of*

$$\lambda\phi_p(\boldsymbol{f}) + \phi_p(\boldsymbol{g}) = A\boldsymbol{f}\,, \tag{4.23}$$

is greater than or equal to ν_d/d.

Proof. From (4.23) we have

$$pv_0(\boldsymbol{f}) \geq \min\left(v_0(A) + v_0(\boldsymbol{f}), pv_0(\boldsymbol{g})\right) := n_0.$$

Two cases occur :

- If $n_0 = v_0(A) + v_0(\boldsymbol{f})$, then $pv_0(\boldsymbol{f}) \geq v_0(A) + v_0(\boldsymbol{f})$ and
$$v_0(\boldsymbol{f}) \geq \frac{v_0(A)}{p-1}\,.$$
Since $dv_0(\boldsymbol{f})$ is an integer we have $dv_0(f) \geq \nu_d$, as wanted.
- If $n_0 = pv_0(\boldsymbol{g})$ then $v_0(\boldsymbol{f}) \geq v_0(\boldsymbol{g})$, which concludes.

□

Corollary 4.3.7. *Let $d \in \mathcal{D}_0$. If the Mahler system (4.6) is regular singular at 0, an associated gauge transformation can be written as*

$$\Psi(z) = \sum_{n \geq \nu_d} \Psi_n z^{n/d} \in \mathrm{GL}_n\left(\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)\right)$$

where $\Psi_n \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. The matrix Ψ_{ν_d} might be a zero matrix.

Proof. Reasoning by induction as in the proof of Corollary 4.3.5, this result follows from Equation (4.21) and Lemma 4.3.6. □

4.4 A characterisation of regular singular systems

In this section, we consider the Mahler system (4.6) and we fix an integer $d \in \mathcal{D}_0$. From Corollary 4.3.5, the Mahler system (4.6) is regular singular at 0 if and only if there exist $\Psi \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)\right)$, an associated gauge transformation, and $\Lambda \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ such that

$$\Psi\Lambda^{-1} = A^{-1}\phi_p(\Psi). \tag{4.24}$$

Therefore, instead of looking for a gauge transformation Ψ with entries in $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$, we use the operator $\phi_d : z \mapsto z^d$ and work in the field $\overline{\mathbb{Q}}((z))$ of Laurent series. Let

$$\Theta_d := \phi_d\left(\Psi\right) \quad \text{and} \quad B_d := \phi_d(A^{-1}). \tag{4.25}$$

Applying ϕ_d to (4.24), we have :

$$\Theta_d \Lambda^{-1} = B_d \phi_p\left(\Theta_d\right). \tag{4.26}$$

In what follows, we often omit the dependency in d in order to lighten the notations. We let

$$B(z) = \sum_{n \geq d v_0(A^{-1})} B_n z^n$$

denote the Laurent expansion of B.

4.4.1 Properties satisfied by columns of a gauge transformation

In this section, we assume that the Mahler system (4.6) is regular singular at 0 and, without loss of generality, we assume that the matrix Λ^{-1} is a Jordan matrix,

$$\Lambda^{-1} := \begin{pmatrix} J_{s_1}(\gamma_1) & & & \\ & J_{s_2}(\gamma_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_r}(\gamma_r) \end{pmatrix}$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ are algebraic numbers and $J_{s_i}(\gamma_i)$ is a Jordan block of size s_i associated with an eigenvalue γ_i. We recall that we fixed an integer $d \in \mathcal{D}_0$. Let

$$\boldsymbol{\theta}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{1,s_1}, \boldsymbol{\theta}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{2,s_2}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{r,1}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{r,s_r} \in \overline{\mathbb{Q}}((z))^m$$

denote the columns of $\Theta_d \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\left((z)\right)\right)$ indexed with respect to the Jordan normal form of Λ^{-1}. We infer from (4.26) that for $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\boldsymbol{\theta}_{i,j}$ satisfy

$$\begin{array}{rcll} \gamma_i \boldsymbol{\theta}_{i,1} & = & B_d \phi_p(\boldsymbol{\theta}_{i,1}) & \\ \gamma_i \boldsymbol{\theta}_{i,j} + \boldsymbol{\theta}_{i,j-1} & = & B_d \phi_p(\boldsymbol{\theta}_{i,j}) & \text{if} \quad j \geq 2. \end{array} \tag{4.27}$$

Since the matrix $B := B_d$ is nonsingular, from the first equation, $\gamma_i \neq 0$. Let $\boldsymbol{f} \in \overline{\mathbb{Q}}((z))^m$ be a solution of the linear system

$$\gamma \boldsymbol{f} = B \phi_p(\boldsymbol{f}),$$

for some $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$. It follows from Lemma 4.3.6 that the valuation of $\boldsymbol{f}$ is at least ν_d. Write $\boldsymbol{f} = \sum_{n \geq \nu_d} \boldsymbol{f}_n z^n$, $\boldsymbol{f}_n \in \overline{\mathbb{Q}}^m$ and define $\boldsymbol{f}_n := 0$ if $n < \nu_d$. Then, for every $n \in \mathbb{Z}$, we have

$$\gamma \boldsymbol{f}_n = \sum_{(k,\ell)\,:\,k+p\ell=n} B_k \boldsymbol{f}_\ell \,.$$

Write
$$\mu_d := \lceil -dv_0\left(A^{-1}\right)/(p-1)\rceil \,. \tag{4.28}$$
Since $AA^{-1} = \mathrm{I}_m$, we have $v_0(A) + v_0(A^{-1}) \leq 0$ so $\nu_d \leq \mu_d$. The vectors $\boldsymbol{f}_\ell$ which are taken into account in the right-hand side of the equation have an index $\ell \leq \frac{n-dv_0(A^{-1})}{p}$. Then, if $n > \mu_d$, we have $\frac{n-dv_0(A^{-1})}{p} < n$. Thus, $\boldsymbol{f}_n$ is uniquely determined by the vectors $\boldsymbol{f}_\ell$, $\ell < n$. Moreover, the coefficients of the vectors $\boldsymbol{f}_\ell$, $\nu_d \leq \ell \leq \mu_d$, are solutions of some linear equations depending on γ and B. Thus, the problem of determining $\boldsymbol{f}$ can be transformed into a finite dimensional problem. To capture this we introduce the following map :

$$\begin{array}{rccc} \pi_d : & \overline{\mathbb{Q}}((z))^m & \to & \overline{\mathbb{Q}}^{m(\mu_d-\nu_d+1)} \\ & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{g}_n z^n & \mapsto & \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_{\nu_d} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{\mu_d} \end{pmatrix} . \end{array}$$

In fact, we have the following result.

Lemma 4.4.1. *If $\boldsymbol{f} = \sum_{n\geq\nu_d} \boldsymbol{f}_n z^n$, with $\boldsymbol{f}_n \in \overline{\mathbb{Q}}^m$, satisfy for every $n \in \mathbb{Z}$*

$$\boldsymbol{f}_n = \alpha\left(\boldsymbol{h}_n + \sum_{(k,\ell)\,:\,k+p\ell=n} B_k \boldsymbol{f}_\ell\right)$$

where $\boldsymbol{h}_n \in \overline{\mathbb{Q}}^m$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ and $\boldsymbol{f}_n = 0$ if $n < \nu_d$, then $\boldsymbol{f}$ is uniquely determined by $\pi_d(\boldsymbol{f})$ and the following recurrence relation for $n > \mu_d$:

$$\boldsymbol{f}_n = \alpha\left(\boldsymbol{h}_n + \sum_{\ell=\nu_d}^{n-1} B_{n-p\ell} \boldsymbol{f}_\ell\right) .$$

We define two block matrices

$$\begin{aligned} M_d &:= (B_{i-pj})_{\nu_d\leq i,j\leq\mu_d} \,, \\ N_d &:= \begin{cases} (B_{i-pj})_{dv_0\left(A^{-1}\right)+p\nu_d\leq i\leq\nu_d-1,\ \nu_d\leq j\leq\mu_d} & \text{if } \nu_d < \mu_d \\ \mathbf{0} \in \mathcal{M}_{1,m(\mu_d-\nu_d+1)}\left(\overline{\mathbb{Q}}\right) & \text{if } \nu_d = \mu_d \,. \end{cases} \end{aligned}$$

Since $\nu_d \leq \mu_d$, π_d and the matrix M_d are well defined. Let us check that the matrix N_d is well defined. Since $\nu_d \in \mathbb{Z}$, we have $\nu_d < \mu_d$ if and only if $\nu_d < -dv_0\left(A^{-1}\right)/(p-1)$. In that case, $dv_0(A^{-1}) + p\nu_d \leq \nu_d - 1$ and the matrix N_d is well defined.

It follows from (4.27) that one has to solve some (in)homogeneous Mahler systems. We often denote by M and N the matrices M_d and N_d defined above. If $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$, for all positive integer j, we consider the $\overline{\mathbb{Q}}$-vector space

$$V_{\gamma,j} := \operatorname{Ker}\left((M_d - \gamma I)^j\right) \cap \left(\bigcap_{k=0}^{j-1} \operatorname{Ker}\left(N_d(M_d-\gamma I)^k\right)\right) .$$

We define $V_{\gamma,0} := \{0\}$.

Lemma 4.4.2. *Let $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ and $j \in \mathbb{N}$. Let $\boldsymbol{h} \in \overline{\mathbb{Q}}((z))^m$ be a Laurent series whose valuation is at least ν_d and such that $\pi_d(\boldsymbol{h}) \in V_{\gamma,j}$. The map π_d induces a bijection between the affine space of solutions $\boldsymbol{f} \in \overline{\mathbb{Q}}((z))^m$ of*

$$\gamma \boldsymbol{f} + \boldsymbol{h} = B_d \phi_p \boldsymbol{f}\,, \tag{4.29}$$

and the affine space of solutions $\boldsymbol{y} \in V_{\gamma,j+1}$ of

$$(M_d - \gamma I)\boldsymbol{y} = \pi_d(\boldsymbol{h})\,. \tag{4.30}$$

Proof. Write

$$\boldsymbol{h} = \sum_{n \geq \nu_d} \boldsymbol{h}_n z^n, \qquad \boldsymbol{h}_n \in \overline{\mathbb{Q}}^m\,,$$

The valuation of any solution $\boldsymbol{f}$ of (4.29) is at least ν_d. Indeed, from Equation (4.29), we have $\phi_p(\boldsymbol{f}) = \phi_d(A)\,(\gamma\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h})$ so $pv_0(\boldsymbol{f}) \geq dv_0(A) + \min(v_0(\boldsymbol{f}), v_0(\boldsymbol{h}))$. If $v_0(\boldsymbol{f}) \leq v_0(\boldsymbol{h})$ then $(p-1)v_0(\boldsymbol{f}) \geq dv_0(A)$ thus $v_0(\boldsymbol{f}) \geq \nu_d$. Otherwise, $v_0(\boldsymbol{f}) \geq v_0(\boldsymbol{h}) \geq \nu_d$. Let

$$\boldsymbol{f} = \sum_{n \geq \nu_d} \boldsymbol{f}_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}((z))^m, \qquad \boldsymbol{f}_n \in \overline{\mathbb{Q}}^m.$$

If $n < \nu_d$, we define $\boldsymbol{f}_n := 0$ and $\boldsymbol{h}_n := 0$. The series $\boldsymbol{f}$ is a solution of (4.29) if and only if for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{h}_n = \sum_{(k,l)\,:\,k+p\ell=n} B_k \boldsymbol{f}_\ell\,. \tag{4.31}$$

This is equivalent to

$$\begin{cases} N\pi_d(\boldsymbol{f}) = 0 \qquad \text{(from the cases } n < \nu_d\text{)} \\[2ex] M\pi_d(\boldsymbol{f}) = \gamma\pi_d(\boldsymbol{f}) + \pi_d(\boldsymbol{h}) \;\; \text{(from the cases } \nu_d \leq n \leq \mu_d\text{)} \\[2ex] \forall n \geq \mu_d + 1, \quad \boldsymbol{f}_n = \frac{1}{\gamma}\left(-\boldsymbol{h}_n + \sum\limits_{\ell=\nu_d}^{n-1} B_{n-p\ell}\boldsymbol{f}_\ell\right)\,. \end{cases} \tag{4.32}$$

Let us give details on this equivalence. If $n < \nu_d$, the left-hand side of the equation (4.31) is 0. Thus, we have

$$\forall n < \nu_d, \qquad \sum_{(k,l)\,:\,k+p\ell=n} B_k \boldsymbol{f}_\ell = 0\,.$$

If $n = k + p\ell$ and $n < dv_0(A^{-1}) + p\nu_d$ then $\ell < \nu_d$ or $k < v_0(B) = dv_0(A^{-1})$. Moreover, by definition of μ_d, introduced in (4.28), we have $(1-p)\mu_d \leq dv_0(A^{-1})$ so if $\ell > \mu_d$ then $\nu_d - 1 - p\ell < v_0(B)$. Thus, the above equation is equivalent to

$$\forall n \in \{dv_0(A^{-1}) + p\nu_d, \ldots, \nu_d - 1\}, \quad \sum_{\ell=\nu_d}^{\mu_d} B_{n-p\ell}\boldsymbol{f}_\ell = 0\,,$$

which is equivalent to

$$N\pi_d(\boldsymbol{f}) = 0\,.$$

Similarly, the equation (4.31) for all n such that $\nu_d \leq n \leq \mu_d$ is equivalent to

$$\gamma\pi_d(\boldsymbol{f}) + \pi_d(\boldsymbol{h}) = M\pi_d(\boldsymbol{f}) \ .$$

The third equality follows from Lemma 4.4.1.

The second equality of (4.32) implies that $(M-\gamma I)\pi_d(\boldsymbol{f}) = \pi_d(\boldsymbol{h}) \in V_{\gamma,j}$ and the first equality implies that $\pi_d(\boldsymbol{f}) \in \mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N(M-\gamma I)^0)$. Thus, $\pi_d(\boldsymbol{f}) \in V_{\gamma,j+1}$ and it satisfies (4.30). Conversely, if $\boldsymbol{y} \in V_{\gamma,j+1}$ is a solution of the equation (4.30), then there exists $\boldsymbol{f}$ solution of (4.29) such that $\pi_d(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{y}$. Indeed, we have $N\boldsymbol{y} = 0$ and $M\boldsymbol{y} = \gamma\boldsymbol{y} + \pi_d(\boldsymbol{h})$. We write $(f_{\nu_d}, \ldots, f_{\mu_d})^\top := \boldsymbol{y}$ and we consider the unique sequence $(\boldsymbol{f}_n)_{n\geq\nu_d}$ verifying the third equation of (4.32). Then, $\boldsymbol{y} = \pi_d(\boldsymbol{f})$ with $\boldsymbol{f} = \sum_{n\geq\nu_d} \boldsymbol{f}_n z^n$ and $\boldsymbol{f}$ is solution of the system (4.32), that is, $\boldsymbol{f}$ is solution of (4.29).

It remains to prove the injectivity. It follows from the fact that $\boldsymbol{f}$ is a solution of (4.29) if and only if it is a solution of (4.32) and the coefficients of $\boldsymbol{f}$ are uniquely determined by $\pi_d(\boldsymbol{f})$ in (4.32). □

Remark 4.4.3. Note that there might be no nonzero solution of

$$\gamma\boldsymbol{f} = B_d\phi_p\boldsymbol{f} \ ,$$

even when γ is a nonzero eigenvalue of M_d. More precisely, from this lemma, there exists a nonzero solution of this system if and only if γ is in the set of the nonzero eigenvalues of M_d and satisfies $\dim(V_{\gamma,1}) \geq 1$. Let $\Gamma := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ be this set.

4.4.2 Construction of the matrices

In this section we show how to build a matrix U with entries in $\overline{\mathbb{Q}}((z))$ and with as many linearly independent columns as possible, together with a constant square matrix C such that

$$UC = B\phi_p(U).$$

Our matrix U may not be a square matrix. As we shall see, it will be if and only if the system (4.6) is regular singular at 0. In that case, setting $\Psi := \phi_{1/d}(U)$ we will have $\phi_p(\Psi)^{-1}A\Psi = C^{-1} \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}})$, as wanted.

We recall that $V_{\gamma,0} := \{0\}$ and for all positive integer j,

$$V_{\gamma,j} := \mathrm{Ker}\left((M_d-\gamma I)^j\right) \cap \left(\bigcap_{k=0}^{j-1} \mathrm{Ker}\left(N_d(M_d-\gamma I)^k\right)\right).$$

Lemma 4.4.4. *Let $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$. The sequence $(V_{\gamma,j})_{j\in\mathbb{N}}$ of subspaces of $\overline{\mathbb{Q}}^{m(\mu_d-\nu_d+1)}$ is non-decreasing. Let*

$$a(\gamma) := \min\{n \in \mathbb{N}^\star \mid V_{\gamma,n} = V_{\gamma,n+1}\}.$$

Then, $V_{\gamma,j} = V_{\gamma,a(\gamma)}$ for all $j \geq a(\gamma)$. Moreover, for $i \in \{1, \ldots, a(\gamma)\}$, if

$$k_{\gamma,j} := \dim(V_{\gamma,j}) - \dim(V_{\gamma,j-1})$$

then the sequence $(k_{\gamma,j})_{j\in\mathbb{N}^\star}$ is non-increasing.

Proof. Let $j \in \mathbb{N}$. If $\boldsymbol{v} \in V_{\gamma,j}$ then $(M-\gamma I)^j \boldsymbol{v} = 0$ so $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(N(M-\gamma I)^j)$ and $(M-\gamma I)^{j+1}\boldsymbol{v} = 0$. This proves the first point. The second point is obvious. In order to prove the last point, fix an integer $j \in \{1, \ldots, a(\gamma)-1\}$ and consider the linear map

$$\begin{array}{rccc} \psi_j : & V_{\gamma,j+1} & \to & V_{\gamma,j}/V_{\gamma,j-1} \\ & x & \mapsto & (M-\gamma I)x\,. \end{array}$$

Its kernel is $V_{\gamma,j}$ so the induced map $\overline{\psi_j} : V_{\gamma,j+1}/V_{\gamma,j} \to V_{\gamma,j}/V_{\gamma,j-1}$ is injective. Therefore, taking the dimensions, we have

$$\forall j \in \{1, \ldots, a(\gamma)-1\},\ k_{\gamma,j+1} \leq k_{\gamma,j}.$$

□

We recall that $\Gamma := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ is the set of nonzero eigenvalues γ of M which satisfy $\dim(V_{\gamma,1}) \geq 1$.

Proposition 4.4.5. *Let $\gamma_i \in \Gamma$. We consider $U \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\overline{\mathbb{Q}}((z))\right)$ whose columns are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$ such that*

$$UC_i = B\phi_p(U)$$

where $C_i \in \mathrm{GL}_n\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ is a Jordan matrix with only one eigenvalue γ_i. The biggest matrix U_i satisfying these conditions has $n = \dim\left(V_{\gamma_i,a(\gamma_i)}\right)$ columns.

Proof. We simplify the notations of Lemma 4.4.4 setting $V_j := V_{\gamma_i,j}$, $a := a(\gamma_i)$, $k_j := k_{\gamma_i,j}$ and $M_\gamma := M - \gamma_i I$. A column $\boldsymbol{u}$ of U satisfies an equation of the form (4.29) so it follows from Lemma 4.4.2 that $\pi_d(\boldsymbol{u}) \in V_a$ and $n \leq \dim(V_a)$. Thus, in order to prove the proposition, we build a matrix U satisfying the previous conditions with exactly $n = \dim(V_a)$ columns.

First, for all $j \in \{2, \ldots, a\}$, we construct a basis of a subspace W_j of V_j such that

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_j.$$

A similar construction appears in a proof of Jordan's theorem for nilpotent matrices using Young tableau. We notice that $\mathrm{Ker}(M_\gamma) \cap V_j \subset V_{j-1}$, thus the map

$$\begin{array}{ccc} W_j & \to & W_{j-1} \\ x & \mapsto & M_\gamma x \end{array}$$

is injective, where we write $W_1 := V_1$. We first choose a basis $\boldsymbol{v}_1^{(a)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_a}^{(a)}$ of the vector space W_a. Let $0 \leq \ell \leq a-1$. Assume that we have chosen a basis

$$\boldsymbol{v}_1^{(a-\ell)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_{a-\ell}}^{(a-\ell)}$$

of $W_{a-\ell}$. We define

$$\boldsymbol{v}_1^{(a-\ell-1)} := M_\gamma \boldsymbol{v}_1^{(a-\ell)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_{a-\ell}}^{(a-\ell-1)} := M_\gamma \boldsymbol{v}_{k_{a-\ell}}^{(a-\ell)},$$

and we complete it with vectors $\boldsymbol{v}_{k_{a-\ell}+1}^{(a-\ell-1)}, \dots, \boldsymbol{v}_{k_{a-\ell-1}}^{(a-\ell-1)}$ to form a basis of the vector space $W_{a-\ell-1}$. In the end, we have the following Young tableau, where the jth column is a basis of W_j.

$\boldsymbol{v}_1^{(1)} := M_\gamma^{a-1}\boldsymbol{v}_1^{(a)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{v}_1^{(a-1)} := M_\gamma \boldsymbol{v}_1^{(a)}$	$\boldsymbol{v}_1^{(a)}$
$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{v}_{k_a}^{(1)} := M_\gamma^{a-1}\boldsymbol{v}_{k_a}^{(a)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{v}_{k_a}^{(a-1)} := M_\gamma \boldsymbol{v}_{k_a}^{(a)}$	$\boldsymbol{v}_{k_a}^{(a)}$
$\boldsymbol{v}_{k_a+1}^{(1)} := M_\gamma^{a-2}\boldsymbol{v}_{k_a+1}^{(a-1)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{v}_{k_a+1}^{(a-1)}$	
$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
$\boldsymbol{v}_{k_{a-1}}^{(1)} := M_\gamma^{a-2}\boldsymbol{v}_{k_{a-1}}^{(a-1)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{v}_{k_{a-1}}^{(a-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$		
$\boldsymbol{v}_{k_2+1}^{(1)}$			
$\vdots$			
$\boldsymbol{v}_{k_1}^{(1)}$			

We decompose

$$V_a = \bigoplus_{j=1}^{a} W_j$$

and for each j we consider the basis $\left(\boldsymbol{v}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{v}_{k_j}^{(j)}\right)$ of W_j constructed above. Thus,

$$\{\boldsymbol{v}_\ell^{(j)} \;:\; 1 \le j \le a,\, 1 \le \ell \le k_j\}$$

is a basis of V_a. For every $\ell \in \{1, \dots, k_1\}$ we let $\boldsymbol{u}_\ell^{(1)} \in \overline{\mathbb{Q}}((z))_{\nu_d}^m$ denote the unique solution of

$$\gamma \boldsymbol{f} = B\phi_p(\boldsymbol{f})$$

such that $\pi_d\left(\boldsymbol{u}_\ell^{(1)}\right) = \boldsymbol{v}_\ell^{(1)}$. Then, we define recursively on $j \in \{2 \dots, a\}$ the vectors $\boldsymbol{u}_\ell^{(j)} \in \overline{\mathbb{Q}}((z))_{\nu_d}^m$, for every $\ell \in \{1, \dots, k_j\}$, solutions of

$$\gamma \boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}_\ell^{(j-1)} = B\phi_p(\boldsymbol{f})$$

and such that $\pi_d\left(\boldsymbol{u}_\ell^{(j)}\right) = \boldsymbol{v}_\ell^{(j)}$. The existence and unicity of such vectors follow from Lemma 4.4.2. In fine, we have constructed vectors

$$\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \dots, \boldsymbol{u}_{k_1}^{(1)}, \boldsymbol{u}_1^{(2)}, \dots, \boldsymbol{u}_{k_2}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{u}_1^{(a)}, \dots, \boldsymbol{u}_{k_a}^{(a)}, \tag{4.33}$$

such that $\pi_d(\boldsymbol{u}_\ell^{(j)}) = \boldsymbol{v}_\ell^{(j)}$ for every $(j, \ell) \in \{1, \dots, a\} \times \{1, \dots, k_j\}$. In particular, the family (4.33) is linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$. Let U be the matrix whose columns are the elements in (4.33) re-ordered using the lexical order on the indices, that is :

$$\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_1^{(2)}, \dots, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(2)}, \dots, \boldsymbol{u}_{k_1}^{(1)}, \dots$$

Let C be a Jordan matrix whose Jordan blocks are

$$J_\gamma(s_1), \cdots, J_\gamma(s_{k_1})$$

where we let s_ℓ denote the number of column vectors of the form $\boldsymbol{u}_\ell^{(\cdot)}$ (that is the number of columns in the ℓth row of the above table). For example, $s_1 = a$. Then,

$$UC = B\phi_p(U).$$

This matrix U has $n = \dim(V_a)$ columns which are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$, which concludes. □

We write

$$\mathfrak{V}_d := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} V_{\gamma,a(\gamma)}. \tag{4.34}$$

In what follows, we often omit the dependency in d of $\mathfrak{V}_d$. Thus, we let $\mathfrak{V} := \mathfrak{V}_d$. The vector spaces $V_{\gamma,a(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$, are in direct sum so the dimension of the $\overline{\mathbb{Q}}$-vector space $\mathfrak{V}$ is

$$\dim(\mathfrak{V}) = \sum_{i=1}^{t} \dim\left(V_{\gamma_i,a(\gamma_i)}\right).$$

Corollary 4.4.6. *We consider $U \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\overline{\mathbb{Q}}((z))\right)$ whose columns are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$ such that*

$$UC = B_d\phi_p(U)$$

where $C \in \mathrm{GL}_n\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ is a Jordan matrix. The biggest matrix U satisfying these conditions has $n = \dim(\mathfrak{V}_d)$ columns. In particular, $\dim(\mathfrak{V}_d) \leq m$.

Proof. As noted in Remark 4.4.3, the set of eigenvalues of C is Γ. Moreover, from Lemma 4.4.2, $n \leq \dim(\mathfrak{V})$. Let U_i and C_i be the matrices obtained in the previous lemma. We let $U := (U_1 \mid \ldots \mid U_t)$ denote the matrix whose columns are the columns of the U_i and we let C denote a Jordan matrix whose blocks are $C_1, \ldots, C_t$ that is

$$C := \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t \end{pmatrix}.$$

The matrix U is not necessarily a square matrix but it follows from our construction that

$$UC = B\phi_p(U).$$

Furthermore, since the vector spaces $V_{\gamma_1,a(\gamma_1)}, \ldots, V_{\gamma_t,a(\gamma_t)}$ are in direct sum, the columns of U are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$. Thus U has $\sum_{i=1}^{t} \dim\left(V_{\gamma_i,a(\gamma_i)}\right) = \dim(\mathfrak{V})$ columns. Since the columns of $U \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\overline{\mathbb{Q}}((z))\right)$ are linearly independent, then $n \leq m$. □

It follows from the following lemma that the columns of U are actually linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}((z))$.

Lemma 4.4.7. *Let T be a matrix with entries in $\overline{\mathbb{Q}}((z))$ and D be a constant invertible matrix such that*

$$TD = B_d\phi_p(T)\ . \tag{4.35}$$

If the columns of T are linearly dependent over $\overline{\mathbb{Q}}((z))$ then they are linearly dependent over $\overline{\mathbb{Q}}$.

Proof. Let P be a constant invertible matrix such that the matrix PDP^{-1} is upper triangular. Then, $(TP^{-1})(PDP^{-1}) = B\phi_p(TP^{-1})$. Thus, without loss of generality, we replace T with TP^{-1} and we suppose that D is upper triangular. We can also assume that the first column of T is nonzero, otherwise the conclusion of the lemma is immediate. Let a be the smallest integer such that the first a columns of the matrix T are linearly dependent over $\overline{\mathbb{Q}}((z))$. By assumption, $a \geq 2$. There exists a column vector $\boldsymbol{g} := (g_1, \dots, g_{a-1}, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \overline{\mathbb{Q}}((z))^m$, $m \in \mathbb{N}$, such that

$$T\boldsymbol{g} = 0\,. \tag{4.36}$$

Mutliplying (4.35) by $\phi_p(\boldsymbol{g})$ one obtains

$$TD\phi_p(\boldsymbol{g}) = B\phi_p(T)\phi_p(\boldsymbol{g}) = B\phi_p\left(T\boldsymbol{g}\right) = 0. \tag{4.37}$$

Since D is upper triangular, only the a first coordinates of $D\phi_p(\boldsymbol{g})$ can be nonzero and its ath coordinate is some eigenvalue $\eta \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ of D. By minimality of a, we infer from (4.36) and (4.37) that

$$D\phi_p(\boldsymbol{g}) = \eta\boldsymbol{g}\,.$$

From [Nis96, Thm. 3.1], $\boldsymbol{g} \in \overline{\mathbb{Q}}^m$ and Equation (4.36) provides a linear relation over $\overline{\mathbb{Q}}$ between the columns of T, as wanted. ☐

The following proposition gives a characterisation of Mahler systems which are regular singular at 0.

Proposition 4.4.8. *Let $d \in \mathcal{D}_0$ and $m_0 := \dim\left(\mathfrak{V}_d\right)$. The system (4.6) is regular singular at 0 if and only if $m_0 \geq m$. If it is the case, we have in particular $m_0 = m$.*

Proof. Let $d \in \mathcal{D}_0$. From Corollaries 4.3.5 and 4.3.7, the system (4.6) is regular singular at 0 if and only if it is $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$-equivalent to a constant system in a Jordan normal form with an associated gauge transformation denoted by Ψ such that $v_0\left(\Psi\right) \geq \nu_d/d$. The columns of the gauge transformation $\Psi \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)\right)$ are $\overline{\mathbb{Q}}$-linearly independent so from Equation (4.27) and Lemma 4.4.2, the images under π_d of the columns of $\phi_d\left(\Psi\right)$ are $\overline{\mathbb{Q}}$-linearly independent and they belong to the vector space $\mathfrak{V}$. Therefore, the dimension of this vector space is at least m as wanted.

Conversely, assume that $m_0 \geq m$ and let $B := \phi_d\left(A^{-1}\right)$. From Corollary 4.4.6 and Lemma 4.4.7, there exists a matrix $U \in \mathcal{M}_{m,m_0}\left(\overline{\mathbb{Q}}((z))\right)$ whose columns are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}((z))$ such that

$$UC = B\phi_p(U) \tag{4.38}$$

where $C \in \mathrm{GL}_{m_0}\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ and, in particular, $m_0 \leq m$. Thus, $m = m_0$. From the equation (4.38), setting $\Psi := \phi_{1/d}(U) \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)\right)$, we have

$$\phi_p(\Psi)^{-1} A \Psi = C^{-1} \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right) . \tag{4.39}$$

Thus, the system (4.6) is $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)$-equivalent to a constant system, that is, it is regular singular at 0. □

Therefore, Proposition 4.4.8 can give a first algorithm to test whether or not a system is regular singular at 0. However, it can be done by computing the solutions of some (in)homogeneous Mahler systems and by computing the eigenvalues and eigenvectors of M, which is in general a large matrix. In what follows, we give an another characterisation.

4.4.3 Characterisation of the regular singularity at 0

If M_d is invertible, we have $M_d^n \operatorname{Ker}(N_d) = \operatorname{Ker}(N_d M_d^{-n})$ for $n \in \mathbb{Z}_{<0}$. For convenience, we define

$$M_d^n \operatorname{Ker}(N_d) := \operatorname{Ker}(N_d M_d^{-n})$$

for $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ even if M_d is not invertible. Let

$$\mathfrak{X}_d := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} M_d^n \operatorname{Ker}(N_d) .$$

In what follows, we often write $\mathfrak{X} := \mathfrak{X}_d$.

Lemme 4.4.9. *Let $d \in \mathcal{D}_0$. The vector space $\mathfrak{X}_d$ is the largest subspace of* $\operatorname{Ker}(N_d)$ *on which M_d acts as an isomorphism.*

Proof. By definition, $\mathfrak{X}_d \subset \operatorname{Ker}(N_d)$ and $\mathfrak{X}_d$ is invariant under the action of M_d. Since $\mathfrak{X}_d$ is finite dimensional, to prove that M_d acts as an isomorphism on $\mathfrak{X}_d$ we only have to prove that $\operatorname{Ker}(M_d) \cap \mathfrak{X}_d = \{0\}$. Let $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}(M_d) \cap \mathfrak{X}_d$, and let s denote the size of M_d. Then $\operatorname{Ker}(M_d^s) = \operatorname{Ker}(M_d^{s+1})$. Since $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}_d \subset M_d^s \operatorname{Ker}(N_d)$, there exists $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}(N_d)$ such that $\boldsymbol{x} = M_d^s \boldsymbol{y}$. Then, $M_d^{s+1}\boldsymbol{y} = M_d \boldsymbol{x} = 0$. Thus, $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}(M_d^{s+1}) = \operatorname{Ker}(M_d^s)$ and $\boldsymbol{x} = M_d^s \boldsymbol{y} = 0$. It follows that $\operatorname{Ker}(M_d) \cap \mathfrak{X}_d = \{0\}$.

Now, let $\mathfrak{I} \subset \operatorname{Ker}(N_d)$ be a vector space on which M_d acts as an isomorphism. Then, on the one hand $M_d^n \mathfrak{I} = \mathfrak{I} \subset \operatorname{Ker}(N_d)$ for every $n \in \mathbb{N}$. Thus, $\mathfrak{I} \subset \operatorname{Ker}(N_d M_d^n)$ for every $n \in \mathbb{N}$. On the other hand $\mathfrak{I} = M_d^n \mathfrak{I} \subset M_d^n \operatorname{Ker}(N_d)$ for every $n \in \mathbb{N}$. Therefore, $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{X}_d$. □

Lemma 4.4.10. *The $\overline{\mathbb{Q}}$-vector spaces $\mathfrak{V}_d$ and $\mathfrak{X}_d$ are equal.*

Proof. We recall that

$$V_{\gamma,k} := \operatorname{Ker}\left((M-\gamma I)^k\right) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{k-1} \operatorname{Ker}\left(N\left(M-\gamma I\right)^j\right)\right)$$

and $\mathfrak{V} := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V_{\gamma, a(\gamma)}$ (defined in (4.34)). By definition, $\mathfrak{V}$ is a subspace of $\mathrm{Ker}(N)$. Moreover, M acts as an isomorphism on $\mathfrak{V}$ since $\mathfrak{V} \subset \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Ker}\left((M-\gamma I)^{a(\gamma)}\right)$ with $\Gamma \subset \overline{\mathbb{Q}}^\star$.

From the previous lemma, it remains to prove that $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{V}$. Let $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ denote a basis of $\mathfrak{X}$ and let E be the matrix of size $m(\mu_d - \nu_d + 1) \times n$ whose columns are the $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Since $\mathfrak{X}$ is M-invariant, there exists $R \in \mathcal{M}_n\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ such that

$$ME = ER. \tag{4.40}$$

From the previous lemma, $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathfrak{X} = \{0\}$. Thus, the matrix R is invertible. We can change the basis $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ and assume that R is a Jordan matrix. Thus, (4.40) implies that the set of eigenvalues of R is included in the set of eigenvalues of M. Let $J_\gamma(s)$ be the first Jordan block of R. Then, using the fact that the columns of E belong to $\mathrm{Ker}(N)$, one can prove by induction on $j \in \{1, \ldots, s\}$ that $\boldsymbol{e}_j \in V_{\gamma,j}$. Doing this for all the Jordan blocks of J, we obtain that the columns of E belong to $\mathfrak{V}$, as wanted. □

The main result of this paper states as follows.

Theorem 4.4.11. *The three following propositions are equivalent :*

1. *The Mahler system* (4.6) *is regular singular at* 0*,*
2. $\dim \mathfrak{X}_d \geq m$ *for some integer* $d \in \mathcal{D}_0$*,*
3. $\dim \mathfrak{X}_d = m$ *for every integer* $d \in \mathcal{D}_0$*.*

In that case, the system is $\overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$*-equivalent to a constant system for every* $d \in \mathcal{D}_0$*.*

Proof. This theorem is an immediate consequence of Proposition 4.4.8 and Lemma 4.4.10. □

Thus, to prove that some Mahler system is regular singular at 0, one only needs to find an integer $d \in \mathcal{D}_0$ and to check if $\dim \mathfrak{X}_d \geq m$.

4.5 A concrete algorithm

Theorem 4.4.11 gives the description of a vector space whose dimension characterises the regular singularity at 0 of a Mahler system. However, if the system is regular singular at 0, this theorem does not tell how to build a matrix Ψ such that $\phi_p(\Psi)^{-1} A \Psi \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$. Such a construction was done with the help of the matrix U in Section 4.4.2 but the interest of this construction is more heuristic than effective because it requires finding eigenvalues of M_d. In this section we describe an algorithm to compute the matrix Ψ which does not require the determination of eigenvalues. In fine, the coefficients of the Puiseux series defining the matrix Ψ belong to the same number field as the coefficients of the rational functions defining the matrix A.

4.5.1 A direct construction of a gauge transformation

Assume that the Mahler system (4.6) is regular singular at 0. From Theorem 4.4.11, there exists an integer $d \in \mathcal{D}_0$ such that the dimension of $\mathfrak{X}_d$ is equal to m. Let $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ be a basis of $\mathfrak{X}_d$ and let E be the $m(\mu_d - \nu_d + 1) \times m$ matrix whose columns are $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. As in (4.40), we have

$$M_d E = ER$$

for some matrix $R \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$. We make a block decomposition of E into $\mu_d - \nu_d + 1$ matrices $E_{\nu_d}, \ldots, E_{\mu_d} \in \mathcal{M}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$:

$$E = \left(\begin{array}{c} E_{\nu_d} \\ \hline \vdots \\ \hline E_{\mu_d} \end{array}\right).$$

We then define by induction on $n > \mu_d$ a matrix $E_n \in \mathcal{M}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ setting

$$E_n = \left(\sum_{(k,l)\,:\,k+p\ell=n} B_k E_\ell \right) R^{-1} \tag{4.41}$$

where $B = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n z^n = \phi_d(A)^{-1}$. As in Lemma 4.4.1, when $n > \mu_d$, the matrices E_ℓ contributing to right-hand side of the equality are those for which $\ell < n$. Hence the matrices E_n are well defined. If $n < \nu_d$, we write $E_n = 0$. We stress that (4.41) holds for any $n \in \mathbb{Z}$:

- by construction, it holds when $n > \mu_d$;
- when $\nu_d \leq n \leq \mu_d$, it follows from the fact that $ER = M_d E$;
- when $n < \nu_d$, since $\mathfrak{X} \subset \mathrm{Ker}(N_d)$, it follows from the equality $N_d E = 0$.

We write $U := \sum_{n \geq \nu_d} E_n z^n$. It follows from (4.41) that

$$UR = B\phi_p(U)\,. \tag{4.42}$$

Since $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ is a basis of $\mathfrak{X}_d$, the columns of U are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$. It follows from Lemma 4.4.7 that they are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}((z))$. Thus, the matrix U is nonsingular. Now, we consider $\Psi := \phi_{1/d}(U)$. It follows from (4.42) that

$$\phi_p(\Psi)^{-1} A \Psi = R^{-1} \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right). \tag{4.43}$$

Thus, Ψ is a gauge transformation we are looking for.

The above construction gives information about the field containing the coefficients of the Puiseux expansion of the entries of Ψ.

Corollary 4.5.1. *We consider the Mahler system (4.6). Let $\mathbf{k} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ be a number field such that $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k}(z))$. The system (4.6) is regular singular at 0 if and only if it is $\widehat{\mathbf{k}(z)}$-equivalent to a matrix in $\mathrm{GL}_m(\mathbf{k})$, where*

$$\widehat{\mathbf{k}(z)} := \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbf{k}\left(\left(z^{1/d}\right)\right),$$

is the field of Puiseux series with coefficients in $\mathbf{k}$.

Proof. From Theorem 4.4.11, the dimension of the $\overline{\mathbb{Q}}$-vector space $\mathfrak{X}_d$ equals m. Since M_d and N_d have entries in $\mathbf{k}$, $\mathfrak{X}_d$ is defined over $\mathbf{k}$. Hence, the basis $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ of $\mathfrak{X}_d$ can be chosen in $\mathbf{k}^{m(\mu_d-\nu_d+1)}$. It follows that the matrix R and the matrices E_n, $n \geq \nu_d$, have their entries in $\mathbf{k}$. As a consequence the matrix

$$\Psi(z) = \sum_{n \geq \nu_d} E_n z^{n/d}$$

belongs to $\mathrm{GL}_m\left(\mathbf{k}\left(\left(z^{1/d}\right)\right)\right)$. □

Therefore, any Mahler system defined over some number field $\mathbf{k}$ and regular singular at 0 is equivalent to a constant matrix with entries in $\mathbf{k}$.

Remark 4.5.2. The proof of Theorem 4.4.11 and the construction of the gauge transformation in Section 4.5.1 do not rely on the base field on which the entries of A are defined. It does not have to be a subfield of $\overline{\mathbb{Q}}$. Actually, this field could even have positive characteristic.

Theorem 4.4.11 gives the description of a vector space whose dimension characterises the regular singularity at 0 of a Mahler system. In what follows, we show that the construction of Theorem 4.4.11 is algorithmic. This provides a proof of Theorem 4.2.3. Then, we discuss the complexity of this algorithm.

Remark 4.5.3. In our bounds for the complexity, we consider the number of operations in $\overline{\mathbb{Q}}$. However, if $\mathbf{k} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ is the smallest number field such that $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k}(z))$, our operations are done with elements of $\mathbf{k}$. To bound the number of operations over the rational numbers, one should multiply the bounds we give by $\mathcal{O}(\mathrm{M}([\mathbf{k} : \mathbb{Q}]))$, where $[\mathbf{k} : \mathbb{Q}]$ is the degree of $\mathbf{k}$ over $\mathbb{Q}$.

4.5.2 Description of an algorithm computing a ramification index

To apply the result of Theorem 4.4.11, we first have to find an element d in the set $\mathcal{D}_0$. This integer is related to the valuations at 0 of the entries of a companion matrix A_{comp}, $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-equivalent to A, which we obtained thanks to the cyclic vector lemma (Theorem 4.3.1).

Recall that, from the Cauchy's theorem (see [Mar66, Th. 27,2]), the modulus of any root of a nonzero polynomial

$$f := f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots + f_h z^h \quad \text{with} \quad f_0, \dots, f_{h-1} \in \mathbb{C}, f_h \in \mathbb{C}^\star$$

is smaller than 1 plus the max of $\frac{|f_k|}{|f_h|}$, $0 \leq k \leq h-1$. However, number fields are not necessarily invariant under the map $x \mapsto |x|$. To stay in the initial base field, we shall not consider directly the absolute value. Let $\mathbf{k}$ denote a number field such that $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k}(z))$. We fix an embedding $\mathbf{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$. We can obtain an upper bound $V(\xi) \in \mathbb{Q}$ for the absolute value of any $\xi \in \mathbf{k}$. Then, for $f = f_0 + f_1 z + \cdots + f_h z^h$, $f_i \in \mathbf{k}$, $f_h \neq 0$, we write

$$\|f\| := 1 + \max\left\{V\left(\frac{f_k}{f_h}\right), 0 \leq k \leq h-1\right\} \geq 1 + \max\left\{\left|\frac{f_k}{f_h}\right|, 0 \leq k \leq h-1\right\},$$

if $h \geq 1$ and $\|f\| = 1$ otherwise. Hence, $\|f\| \in \mathbb{Q}$ is greater than the modulus of every root of f.

The following algorithm takes a Mahler system as input, computes a companion matrix A_{comp} such that the systems associated with A and A_{comp} are $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-equivalent, and returns the valuations of the last row of this companion matrix.

Algorithm 1: Find the valuation of the entries of the last row of A_{comp}

Input: $A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
Output: The valuations of the last row of a companion matrix $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-equivalent to A.
Compute f, the lcm of the denominators of the entries of A.
Write $\widetilde{A} = fA \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}[z]\right)$.
Consider $z_0 := \max\left(2, \|f\|, \|\det(\widetilde{A})\|\right)$.
Compute a solution $\mathbf{r} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]^m$ of (4.11) by Newton interpolation (it can be done because $z_0, \dots, z_0^{p^{m-1}}$ are all different).
Let P be the matrix whose rows are $\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{i+1} := \phi_p(\mathbf{r}_i)A$, $1 \leq i \leq m-1$.
return the valuation of the entries of $\phi_p(\mathbf{r}_m)AP^{-1}$.

It is clear, from the proof of Theorem 4.3.1 that the matrix $\phi_p(P)AP^{-1}$ is a companion matrix and that its last row is $\phi_p(\mathbf{r}_m)AP^{-1}$. Now, the following algorithm finds an element of $\mathcal{D}_0$, as it was done in the proof of Lemma 4.3.3.

Algorithm 2: Find some integer $d \in \mathcal{D}_0$

Input: $A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
Output: An integer $d \in \mathcal{D}_0$
Compute $(v_0, \dots, v_{m-1})$ the valuations of the last row of a companion matrix $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-equivalent to A, with Algorithm 1.
Compute the lower hull $\mathcal{H}$ of the set of pairs (p^i, v_i), $0 \leq i \leq m$, with $v_m := 0$.
Compute the set $\mathcal{S}$ of denominators of the slopes of $\mathcal{H}$ which are coprime with p.
return $\mathrm{lcm}(\mathcal{S})$.

We compute an upper bound for the complexity of Algorithm 2. Let us first recall some notations and results. Given a positive integer n, we let $\mathrm{M}(n)$ denote the complexity of the product of two polynomials of degree at most n, and $\mathrm{MM}(n)$ denote the complexity of the product of two matrices with at most n rows and n columns. Let $C \in \mathcal{M}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}[z]\right)$ with $\det(C) \neq 0$ and let $\delta := \deg(C)$. The computation of

- the product of two polynomial matrices of degree at most δ and size m has complexity $\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\delta + m^2\mathrm{M}(\delta)\right)$, see [BS05, Th. 4];
- the determinant of C has complexity $\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\mathrm{M}(\delta)\left(\log(m)\right)^2\right)$, see [Sto03];
- the product $\boldsymbol{v}C^{-1}$, where $\boldsymbol{v} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]^m$ has degree at most δ has complexity
$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\mathrm{M}(\delta)\log(m)\log(\delta)\right),$$
assuming that we know some point at which C is invertible, see [Sto03, Cor. 16];

- the inverse of C has complexity $\mathcal{O}\left(m^2\mathrm{M}(m\delta)\log(m\delta)\right)$, see [ZLS15].

Proposition 4.5.4. *Algorithm 2 has complexity*

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\log(m)\mathrm{M}\left(u\right)\log(u)\right) \quad \textit{with} \quad u := (m+\deg(A))p^m.$$

Proof. We start by computing an upper bound for the complexity of Algorithm 1. Assume first that the matrix A has its entries in $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ and let $\delta := \deg(A)$. The computation of $\det(A)$ has complexity

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\mathrm{M}(\delta)\left(\log(m)\right)^2\right).$$

Then, since $f = 1$ here and since $\det(A)$ is a polynomial of degree at most $m\delta$, the computation of z_0 can be done with $\mathcal{O}(m\delta)$ operations. To obtain a solution $\mathbf{r}$ of (4.11), we first need to compute the matrices

$$\left(A\left(z_0^{p^k}\right)\dots A\left(z_0^{p^2}\right)A\left(z_0^{p}\right)A\left(z_0\right)\right)^{-1},\ 1\leq k\leq m-2\,. \tag{4.44}$$

Taking the pth power of a number has complexity $\mathcal{O}(\log(p))$, thus the computation of $z_0, z_0^p, \dots, z_0^{p^{m-2}}$ necessitates $\mathcal{O}(m\log(p))$ operations. A straightforward evaluation of a polynomial with degree ℓ at n points necessitates $\mathcal{O}\left(n\ell\right)$ operations. Since $A(z)$ is made of m^2 polynomials with degree δ the computation of the matrices $A(z_0), A(z_0^p), \dots, A(z_0^{p^{m-2}})$ has complexity $\mathcal{O}\left(m^3\delta\right)$ and we have to compute m products and inverses of these constant matrices. Thus, the computation of (4.44) has complexity

$$\mathcal{O}\left(m\log(p) + m^3\delta + m\mathrm{MM}(m)\right).$$

Then, we compute each of the m entries of $\mathbf{r}$ by doing a Newton interpolation at m points. It has complexity

$$\mathcal{O}(m\mathrm{M}(m)\log(m))$$

(see [BS05]). We recall that the rows of P satisfy $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_{k+1} = \phi_p(\mathbf{r}_k)A$ for every k, $1 \leq k \leq m-1$. In particular,

$$\deg(\mathbf{r}_k) \leq (m+\delta)p^{k-1}\,.$$

The computation of $\phi_p(\mathbf{r}_k)A$ necessitates m^2 sums and products of polynomials of degree at most $(m+\delta)p^k$. Thus, once $\mathbf{r}_k$ is known, the computation of $\mathbf{r}_{k+1}$ has complexity

$$\mathcal{O}\left(m^2\mathrm{M}\left((m+\delta)p^k\right)\right)\,.$$

Once $\mathbf{r}$ is known, the computation of the whole matrix P has complexity

$$\mathcal{O}\left(m^2\sum_{k=1}^{m-1}\mathrm{M}\left((m+\delta)p^k\right)\right)$$

Then, the computation of $\phi_p\left(\mathbf{r}_m\right)A$ has complexity

$$\mathcal{O}\left(m^2\mathrm{M}\left(u\right)\right)\,,$$

where $u := (m+\delta)p^m$, and the computation of $\phi_p(\mathbf{r}_m)\,AP^{-1}$ has complexity

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\log(m)\mathrm{M}(u)\log(u)\right). \tag{4.45}$$

Since (4.45) is not less than the bounds for the complexity of all the previous steps in Algorithm 1, the complexity of Algorithm 1 is (4.45), when A is a matrix with entries in $\overline{\mathbb{Q}}[z]$. Assume now that the entries of A are rational functions. Write $\widetilde{A} = fA$, with $f \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ the least common multiple of the denominators of the entries of A. Then, by definition, $\deg(\widetilde{A}) \leq \deg(A)$. Now, the operations with $A = 1/f\widetilde{A}$ have the same complexity than the one with $\widetilde{A}$ and f and the cost of the computation of f and $\widetilde{A}$ is negligible compared to (4.45). Thus, the complexity of Algorithm 1 is (4.45) for any matrix A. Then, the complexity of computing the lower hull in Algorithm 2 is negligible compared to (4.45). This ends the proof. □

4.5.3 Description of the main algorithm

The following algorithm is the algorithm of Theorem 4.2.3, it tests if a given Mahler system is regular singular at 0.

Algorithm 3: Test for the regular singularity at 0 of a Mahler system

Input: $A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ and the order $n \geq 0$ of truncation.
Output: If the system (4.6) is regular singular at 0 and in that case the constant matrix Λ to which it is equivalent and the truncation at order n of the series expansion of an associated gauge transformation Ψ.

Compute d with Algorithm 2.
Compute ν_d, μ_d, M_d, N_d.
Let $\mathfrak{X} := \mathrm{Ker}N_d$ and $N := N_d$.
for i from 0 to $m(\mu_d - \nu_d + 1)$ **do**
    $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cap M_d^i\mathfrak{X}$.
for i from 0 to $m(\mu_d - \nu_d + 1)$ **do**
    $N := NM_d$;
    $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cap \mathrm{Ker}(N)$.
if $\dim \mathfrak{X} = m$ **then**
    From a basis of $\mathfrak{X}$, compute R and $E_{\nu_d}, \ldots, E_{\mu_d}$ as in Section 4.5.1.
    for j from $\mu_d + 1$ to $\max\{\mu_d + 1; dn\}$ **do**
        Compute E_j from (4.41).
    Let $\Lambda := R^{-1}$.
    return "True", Λ and $\sum_{j=\nu_d}^{dn} E_j z^{j/d}$.
else
    return "False".

The following lemma implies that, at the end of Algorithm 3, the vector space $\mathfrak{X}$ is exactly the vector space $\mathfrak{X}_d$.

Lemma 4.5.5. *Let $c_d := m(\mu_d - \nu_d + 1)$. We have*

$$\mathfrak{X}_d = \bigcap_{-c_d \leq n \leq c_d} M_d^n \mathrm{Ker}(N_d)\,.$$

Proof. If $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, we recall that $M_d^n \mathrm{Ker}(N_d) := \mathrm{Ker}\,(N_d M_d^n)$. Let $\mathfrak{X}_d^- := \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Ker}(N_d M_d^n)$. We first prove that $\mathfrak{X}_d^- := \bigcap_{n=0}^{c_d} \mathrm{Ker}(N_d M_d^n)$. Let $\mathfrak{M}_n := \cap_{k=0}^{n} \mathrm{Ker}\left(N_d M_d^k\right)$. It is clear that if $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n+1}$ then $\mathfrak{M}_\ell = \mathfrak{M}_n$ for all $\ell \geq n$. Thus the sequence $(\mathfrak{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing and then stationary. Since, $\dim \mathfrak{M}_0 \leq c_d$, we must have $\mathfrak{M}_{c_d} = \mathfrak{M}_{c_d+1}$ and $\mathfrak{X}_d^- = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{c_d}$.

Write $\mathfrak{N}_n := \left(\bigcap_{k=0}^{n} M_d^k \mathrm{Ker}(N_d)\right) \bigcap \mathfrak{X}_d^-$. We have

$$M_d \mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}_{n+1} \subset \mathfrak{N}_n\,. \tag{4.46}$$

It is not true that if $\mathfrak{N}_{n_0+1} = \mathfrak{N}_{n_0}$ for some n_0, then $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{n_0}$ for every $n \geq n_0$. However, we shall see that $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{c_d}$ for every $n \geq c_d$. Let $n \geq c_d$, we first notice that $\mathfrak{N}_n \cap \mathrm{Ker}\,(M_d^n) = \{0\}$. Indeed, if $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{N}_n \cap \mathrm{Ker}\,(M_d^n)$ then there exists $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\,(N_d)$ such that $\boldsymbol{x} = M_d^n \boldsymbol{y}$ and $M_d^{2n}\boldsymbol{y} = M_d^n \boldsymbol{x} = 0$. Since $n \geq c_d$, $\mathrm{Ker}(M_d^{2n}) = \mathrm{Ker}(M_d^n)$, therefore, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\,(M_d^n)$ and $\boldsymbol{x} = M_d^n \boldsymbol{y} = 0$. *A fortiori*, $\mathfrak{N}_n \cap \mathrm{Ker}\,(M_d) = \{0\}$ and M_d acts as an isomorphism on $\mathfrak{N}_n$. Therefore, the inclusion (4.46) is an equality, $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_n$ and $\mathfrak{X}_d = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{c_d}$. □

We can now prove Theorem 4.2.3.

Proof of Theorem 4.2.3. We prove that Algorithm 3 returns "True" if and only if the system is regular singular at 0. Then, in that case, we prove that R^{-1} is $\overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$-equivalent to A and that $\sum_{j=\nu_d}^{dn} E_j z^{j/d}$ are the first coefficients in the Puiseux expansion of an associated gauge transformation. From Lemma 4.5.5, Algorithm 3 computes the vector space $\mathfrak{X}_d$. If Algorithm 3 returns "True", then there exists some $d \in \mathcal{D}_0$ such that $\dim \mathfrak{X}_d = m$. Hence, (2) of Theorem 4.4.11 holds and the system is regular singular at 0. Then, arguing as in the construction of a gauge transformation in Section 4.5.1, we prove that R^{-1} is $\overline{\mathbb{Q}}((z^{1/d}))$-equivalent to A and that $\sum_{j=\nu_d}^{dn} E_j z^{j/d}$ are the first coefficients in the Puiseux expansion of an associated gauge transformation. Assume now that the system is regular singular at 0 and let $d \in \mathcal{D}_0$ be given by Algorithm 2. Then, it follows from Theorem 4.4.11 that $\dim \mathfrak{X}_d = m$ for every $d \in \mathcal{D}_0$. In particular Algorithm 3 returns "True". □

When the system (4.6) is regular singular at 0, Algorithm 3 computes a $\mathbf{K}$-equivalent constant matrix. Furthermore, Roques [Roq18, §5.2] described fundamental matrices of solutions for constant systems. Precisely, for $c \in \overline{\mathbb{Q}}^{\star}$ we let e_c and ℓ denote functions such that $\phi_p(e_c) = c e_c$ and $\phi_p(\ell) = \ell + 1$. Any constant system has a basis of solutions in $\overline{\mathbb{Q}}\left[(e_c)_{c\in\overline{\mathbb{Q}}^{\star}}, \ell\right]$. Then, we have the following result.

Corollary 4.5.6. *Consider a system (4.6) which is regular singular at 0. From Algorithm 3, one can compute a fundamental matrix of solutions of (4.6) with entries in $\mathbf{K}\left[(e_c)_{c\in\overline{\mathbb{Q}}^{\star}}, \ell\right]$.*

For example, one can take for e_c and ℓ, the functions $\log(z)^{\log(c)/\log(p)}$ and $\log(\log(z))$.

4.5.4 On the complexity of the main algorithm

We now propose to discuss the complexity of Algorithm 3. We have the following upper bound.

Proposition 4.5.7. *Apart from the computation of the Puiseux expansion of Ψ, the complexity of Algorithm 3 is*

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\log(m)\mathrm{M}(u)\log(u)+mp^{2m-1}v\mathrm{MM}(mv)\right)\,,$$

where $v:=-(v_0(A)+v_0(A^{-1})+1\geq 1$ and $u:=(m+\deg(A))p^m$.

Algorithm 3 requires some calculations with the matrices M_d and N_d. Naively, it should necessitate $\mathrm{MM}(n)$ operations where n is at least the number of rows and the number of columns of M_d and N_d. However, by looking more closely at the shape of M_d and N_d, we will show that it can be lowered to $d\mathrm{MM}(n/d)$.

Definition 4.5.8. Let $D=(D_{i,j})_{1\leq i\leq r,1\leq j\leq s}$ be a block matrix with $D_{i,j}\in\mathcal{M}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$. We say that D is a *d-gridded matrix* if for all $(i_0,j_0)\in\{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,s\}$ such that D_{i_0,j_0} is nonzero, the matrices $D_{i_0,j}$, D_{i,j_0} with $i\not\equiv i_0 \bmod d$ and $j\not\equiv j_0 \bmod d$ are zero matrices. Let σ be a permutation of the set $\{1,\dots,d\}$. We say that σ is *associated with* the d-gridded matrix D if $D_{i,j}=0$ for every $i,j\in\{1,\dots,d\}$ with $j\neq\sigma(i)$.

Lemma 4.5.9. *Let $D=(D_{i,j})_{1\leq i\leq r,1\leq j\leq s}$ and $E=(E_{i,j})_{1\leq i\leq s,1\leq j\leq t}$ be two d-gridded matrices with $D_{i,j},E_{i,j}\in\mathcal{M}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ and, respectively, σ_D and σ_E their associated permutation. We write $u:=\max(r,s,t)$. The computation of the product DE can be done with complexity*

$$\mathcal{O}(d\mathrm{MM}(mu/d)).$$

Furthermore, DE is a d-gridded matrix with associated permutation $\sigma_E\circ\sigma_D$.

Proof. For any $n\in\{1,\dots,d\}$ we let D_n (respectively E_n) denote the block-matrices $(D_{n+kd,\sigma_D(n)+\ell d})_{k,\ell}$ (resp. $(E_{n+kd,\sigma_E(n)+\ell d})_{k,\ell}$). Let $n_0\in\{1,\dots,d\}$, write $F_{n_0}:=D_{n_0}E_{\sigma_D(n_0)}$ and consider $F_{n_0}:=(F_{n_0,k,\ell})_{k,\ell}$, with $F_{n_0,k,\ell}\in\mathcal{M}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$, its block decomposition. For any $i\in\{1,\dots,r\}$, write $i=n_0+kd$ with $n_0\in\{1,\dots,d\}$, $k\in\mathbb{N}$ and for any $j\in\{1,\dots,t\}$, let

$$G_{i,j}:=\begin{cases} F_{n_0,k,\ell} & \text{if } j=\sigma_E\circ\sigma_D(n_0)+\ell d \ \text{ for some } \ell\in\mathbb{N}\,,\\ 0 & \text{otherwise}\,.\end{cases}$$

Then $DE=(G_{i,j})_{i,j}$ which is a d-gridded matrix whose associated permutation is $\sigma_E\circ\sigma_D$. The computation of the product of two permutations of $\{1,\dots,d\}$ has complexity $\mathcal{O}(d)$. Once $\sigma_E\circ\sigma_D$ is known, the computation of each matrix F_n has complexity $\mathcal{O}(\mathrm{MM}(mu/d))$. Thus, the computation of DE has complexity

$$\mathcal{O}(d+d\mathrm{MM}(mu/d))=\mathcal{O}(d\mathrm{MM}(mu/d))\,.$$

$\square$

Remark 4.5.10. The computation of a basis of the (right-)kernel of a d-gridded matrix can be done with the same complexity as the product of two d-gridded matrices. Note that we can add some zero column vectors to the column vectors of the kernel obtained this way in order to form a d-gridded matrix. Similarly, one can compute with the same complexity a d-gridded matrix whose range (that is, the vector space spanned by the columns) is the intersection of the ranges of two d-gridded matrices.

Lemma 4.5.11. *Let $d \in \mathcal{D}_0$. The matrices M_d and N_d are d-gridded matrices.*

Proof. Recall that $M_d := (B_{i-pj}(d))_{\nu_d \leq i,j \leq \mu_d}$ and

$$N_d := \begin{cases} (B_{i-pj}(d))_{\substack{v_0(B(d))+p\nu_d \leq i \leq \nu_d - 1 \\ \nu_d \leq j \leq \mu_d}} & \text{if } \nu_d < \mu_d \\ 0 \in \mathcal{M}_{1,m(\mu_d-\nu_d+1)}\left(\overline{\mathbb{Q}}\right) & \text{if } \nu_d = \mu_d \end{cases}$$

where $\phi_d(A^{-1}) := \sum_n B_n z^n$. In particular if d does not divide $i-pj$ then $B_{i-pj} = 0$. Thus if $B_{i_0-pj_0} \neq 0$ then $B_{i-pj_0} = 0$ for all i such that $i \not\equiv i_0 \bmod d$. Moreover, since p and d are relatively prime, if $B_{i_0-pj_0} \neq 0$ then $B_{i_0-pj} = 0$ for all j such that $j \not\equiv j_0 \bmod d$. The associated permutations to these matrices are the permutations σ_M and σ_N such that, for every $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$p\sigma_M(k) \equiv (p-1)(1-\nu_d) + k \mod d$$
$$p\sigma_N(k) \equiv v_0(B(d)) + p - 1 + k \mod d\,.$$

□

We can now find an upper bound for the complexity of Algorithm 3.

Proof of Proposition 4.5.7. We follow the script of Algorithm 3. Let $\delta = \deg(A)$. From Proposition 4.5.4, the integer d is given by Algorithm 2 with

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\log(m)\mathrm{M}\left(u\right)\log(u)\right) \quad \text{where} \quad u := (m+\delta)p^m \tag{4.47}$$

operations. To compute M_d and N_d, one needs to compute the Laurent series expansion of A^{-1} between $v_0\left(A^{-1}\right)$ and $(\mu_d - p\nu_d)/d$. The computation of the inverse of A can be done with complexity

$$\mathcal{O}(m^2\mathrm{M}(m\delta)\log(m\delta))\,. \tag{4.48}$$

The Newton's method allows to compute the n first terms in the Laurent series expansion of a rational function of degree at most n with complexity $\mathcal{O}(\mathrm{M}(n))$. One checks that $\deg\left(A^{-1}\right) \leq m\delta$. Let $v := -(v_0(A) + v_0(A^{-1})) + 1 \geq 1$. One has

$$n_0 := \frac{\mu_d - p\nu_d}{d} - v_0\left(A^{-1}\right) = \mathcal{O}\left(v\right)$$

and $v \leq m\delta$. Thus the computation of the first n_0 terms of the Laurent expansion of the m^2 entries of A^{-1} has complexity $\mathcal{O}\left(m^2\mathrm{M}\left(m\delta\right)\right)$, which is negligible compared to (4.48). Thus, the computation of M_d and N_d can be done with complexity (4.48). Then, we want to compute

$$\mathfrak{X}_d = \bigcap_{n=-c_d}^{c_d} M_d^n \mathrm{Ker}(N_d)\,,$$

Thus we need to compute $\mathcal{O}(c_d)$ products and kernels of d-gridded matrices, and to compute the intersection of the vector spaces spanned by the columns of these matrices. The number of rows and columns of N_d and M_d being $\mathcal{O}(mdv)$, it follows from Lemma 4.5.9 that the computation of $\mathfrak{X}$ has complexity $\mathcal{O}(c_d d\mathrm{MM}(mv))$. Since $c_d = \mathcal{O}(mdv/p)$ and $d \leq p^m$, the complexity of the computation of $\mathfrak{X}$ is

$$\mathcal{O}\left(mp^{2m-1}v\mathrm{MM}(mv)\right) . \tag{4.49}$$

Now, (4.48) is negligible with respect to (4.47). Thus, Algorithm 3 returns if a system is regular singular or not with

$$\mathcal{O}\left(\mathrm{MM}(m)\log(m)\mathrm{M}(u)\log(u) + mp^{2m-1}v\mathrm{MM}(mv)\right) ,$$

operations. □

One can take $\mathrm{M}(n)\log(n) = \mathcal{O}(n^2)$ and $\mathrm{MM}(n)\log(n) = \mathcal{O}(n^3)$. Thus, a (rather large) bound for the complexity of Algorithm 3 is

$$\mathcal{O}\left(\deg(A)^2 m^5 p^{2m} v^4\right) . \tag{4.50}$$

Remark 4.5.12. In Algorithm 3, we chose to compute first the integer d thanks to the cyclic vector lemma, Algorithm 1 and Algorithm 2. Then we computed the vector space $\mathfrak{X}_d$ with this d. One could ask if running the algorithm for every $d \in \mathcal{D}$ could be faster. It does not seem to be the case. Since we only have to compute the inverse of A once and since $\mathcal{D}$ has $\mathcal{O}(p^m)$ elements, running the algorithm for every $d \in \mathcal{D}$, without using Algorithm 2, would necessitate

$$\mathcal{O}(m^2\mathrm{M}(m\deg(A))\log(m\deg(A)) + mp^{3m-1}v\mathrm{MM}(mv))$$

operations. When $\deg(A)$ is large compared to other parameters, it can be smaller than the complexity of Algorithm 3. However, we have to pay a factor p^{3m} instead of p^{2m}.

4.6 Examples

In this section, we study the regular singular property of some particular systems.

4.6.1 Equations of order 1

Homogeneous equation of order 1

A homogeneous equation of order 1 is an equation of the form

$$\phi_p(y) = ay \tag{4.51}$$

where $a \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, $a \neq 0$.

Proposition 4.6.1. *Any homogeneous equation of order 1 is regular singular at 0.*

Proof. We consider the equation (4.51). Let ν denote the valuation at 0 of a and let $\psi = z^{\nu/(p-1)}$. Then, the system $\phi_p(y) = by$ with $b := \phi_p(\psi)^{-1} a\psi$ is strictly Fuchsian at 0. Thus, the homogeneous equation (4.51) is $\overline{\mathbb{Q}}\left(\left(z^{\nu/(p-1)}\right)\right)$-equivalent to a strictly Fuchsian equation at 0, which implies that (4.51) is regular singular at 0 (see [Roq18, Prop. 34]). □

Inhomogeneous Mahler equations of order 1

Consider an inhomogeneous Mahler equation of order 1

$$q_{-1} + q_0 y + q_1 \phi_p(y) = 0 \tag{4.52}$$

with $q_{-1}, q_0, q_1 \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $q_0 q_1 \neq 0$. The corresponding system is

$$\phi_p(Y) = AY \quad \text{with } A := \begin{pmatrix} -\frac{q_0}{q_1} & -\frac{q_{-1}}{q_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

Proposition 4.6.2. *The system* (4.53) *is regular singular at* 0 *if the equation* (4.52) *has a solution in* $\mathbf{K}$.

Proof. Assume that (4.52) has a solution $f \in \mathbf{K}$. From Proposition 4.6.1, there exist $g \in \mathbf{K}$ and $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$ such that $\phi_p(g)\gamma = -\frac{q_0}{q_1} g$. Then

$$\phi_p \begin{pmatrix} f & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and the system is regular singular at 0. □

Note that it is not a necessary condition. For example, take $q_{-1} = q_0 = -1$ and $q_1 = 1$.

4.6.2 An equation of order 2

Consider the 3-Mahler equation :

$$z^3(1 - z^3 + z^6)(1 - z^7 - z^{10})\phi_3^2(y) - (1 - z^{28} - z^{31} - z^{37} - z^{40})\phi_3(y) \\ + z^6(1 + z)(1 - z^{21} - z^{30})y = 0\,.$$

The matrix of the 3-Mahler system associated with this equation is

$$A(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{z^3(1+z)(1-z^{21}-z^{30})}{(1-z^3+z^6)(1-z^7-z^{10})} & \frac{1-z^{28}-z^{31}-z^{37}-z^{40}}{z^3(1-z^3+z^6)(1-z^7-z^{10})} \end{pmatrix}.$$

We propose to check whether or not the 3-Mahler system associated with this matrix is regular singular at 0. Since we already know a homogeneous linear equation associated with this system, it is not necessary to run Algorithm 1. Algorithm 2 applied to this system returns $d := 2$. We now run Algorithm 3 with $d = 2$. We have $v_0(A) = -3$,

$v_0(A^{-1}) = -6$ and thus $\nu_2 = -3$ and $\mu_2 = 6$. We can compute M and N :

$$M := \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc}
-1 & -3 & & & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
1 & 4 & & & -1 & -2 & & & 1 & 1 & & & -1 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & -1 & -3 & & & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
-1 & -4 & & & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 4 & & & -1 & -2 & & & 1 & 1 & & & -1 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
1 & 4 & & & -1 & -3 & & & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & -1 & -4 & & & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
-1 & -4 & & & 1 & 4 & & & -1 & -2 & & & 1 & 1 & & & -1 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 4 & & & -1 & -3 & & & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$N := \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc}
1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
-1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & -1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
-1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & & & -1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
-1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 1 & & & -1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
-1 & -2 & & & 1 & 1 & & & -1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & 1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline
1 & 2 & & & -1 & -1 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline
& & -1 & -2 & & & 1 & 1 & & & -1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0
\end{array}\right),$$

where we left empty blocks for the ones corresponding to zero matrices in the 2-gridded block decomposition of M and N. In that case, the vector space $\mathfrak{X}_2$ is spanned by the transpose of the two linearly independent vectors

$$\begin{gathered}
(0,1,0,0,1,0,0,0,-1,0,0,0,1,-1,0,0,-1,0,0,0) \\
(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0)
\end{gathered}$$

In particular, $\mathfrak{X}_2$ has dimension 2 and, from Theorem 4.4.11, the system is regular singular at 0. One can check that these vectors are eigenvectors of the matrix M for the eigenvalue 1. Thus the matrix R is the identity matrix of size 2. In particular, the associated gauge transformation Ψ given by Algorithm 3 is a fundamental matrix of solutions because it satisfies

$$\phi_3\left(\Psi\right)^{-1} A\Psi = I_2.$$

From these two vectors, we can compute the first terms of the Puiseux expansion of Ψ

$$\Psi = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{17/2})$$

with

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z^{-1/2} - z^{1/2} + z^{3/2} - z^{5/2} + z^{7/2} - z^{9/2} + z^{11/2} - z^{13/2} + z^{15/2}\,, \\ f_2(z) &= -z^3 + z^4 - z^5 + 2z^6 - 2z^7 + 2z^8\,, \\ f_3(z) &= z^{-3/2} - z^{3/2} + z^{9/2} - z^{15/2}\,. \end{aligned}$$

Remark 4.6.3. Note that this example is the same as the one that illustrates the paper [CDDM18].

4.6.3 Systems coming from finite deterministic automata

As mentioned in the introduction, Mahler systems are related with the automata theory. Indeed, the generating function of an automatic sequence (see [AS03] for a definition) is solution of a Mahler equation. Numerous famous automatic sequences are related to homogeneous or inhomogeneous Mahler equations of order 1. This is the case of the Thue-Morse sequence, the regular paper-folding sequence, the sequences of powers of a given integer, the characteristic sequence of triadic Cantor integers – those whose base-3 representation contains no 1. Thus, their associated systems are regular singular at 0.

Among the sequences satisfying equations with an order greater than 1, a famous one is the *Baum-Sweet sequence*, the characteristic sequence of integers whose binary expansion have no blocks of consecutive 0 of odd length. The system associated with this sequence is strictly Fuchsian at 0 and thus regular singular at 0. An other important one is the Rudin-Shapiro sequence whose general term is

$$\begin{cases} a_n = 1 & \text{if the number of occurrences of two consecutive 1} \\ & \text{in the binary expansion of } n \text{ is even} \\ a_n = -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Its generating series $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ satisfies the equation

$$\phi_2\begin{pmatrix} f(z) \\ f(-z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{-1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(z) \\ f(-z) \end{pmatrix}$$

This system is not regular singular. Indeed, Algorithm 3 returns “ False ”. More precisely, Algorithm 2 returns $d = 3$ and we have $\dim \mathfrak{X}_3 = 1$. Note that we do not need to use Algorithm 2 for computing the integer d in Algorithm 3 in this case. Indeed, we have

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{N} \mid 1 \le d \le 3,\, \gcd(d,p) = 1\} = \{1,3\}\,,$$

thus we can run Algorithm 3 with $d = 3$.

The regular singular property can be seen as "normal" for Mahler systems since a sufficient condition is for the system to be strictly Fuchsian at 0. However, the generating series of an automatic sequence satisfies a Mahler system with a very precise shape : $A^{-1}(0)$ is well defined and has at most one nonzero entry in each column. Among these systems, the strictly Fuchsian property is more occasional.

4.7 Open problems

We discuss here some open problems about the regular singularity at 0 of a Mahler system.

4.7.1 The inverse matrix system

Let $A \in \mathrm{GL}_m(z)$ and $p \geq 2$ be an integer. If the p-Mahler system with matrix A is strictly Fuchsian at 0, then the p-Mahler system with matrix A^{-1} is also strictly Fuchsian at 0 (and hence, regular singular at 0). This property does not extend to regular singular systems. For example, if A denotes the matrix of the regular singular system in Section 4.6.2, the 3-Mahler system associated with A^{-1} is not regular singular at 0. We ask the following question.

Is there a characterisation of matrices A such that the p-Mahler systems associated with both A and A^{-1} are regular singular at 0 ?

4.7.2 Changing the Mahler operator

Assume that a system is strictly Fuchsian at 0. If we change the integer p then the system remains strictly Fuchsian at 0 (hence regular singular at 0). This property does not extend to regular singular systems. Indeed, the 3-Mahler system of Section 4.6.2 is regular singular at 0, while the 2-Mahler system with the same matrix is not. Moreover, the p-Mahler system associated with this matrix is not regular singular when $p \in \{4, \ldots, 30\}$ (and probably beyond). Similarly, the companion system associated with the p-Mahler equation

$$(z^{11} + z^{13})\phi_p^2(y) + (-1/z - z - z^6 + z^{10})\phi_p(y) + (1 - z)y = 0,$$

is regular singular at 0 for $p = 2$ and $p = 4$ but not for $p \in \{3, 5, 6, \ldots, 100\}$ (and probably beyond). It seems that for a matrix $A \in \mathrm{GL}_m\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$ the p-Mahler system associated with A is either regular singular at 0 for every integer or for finitely many (possibly none) integers $p \geq 2$.

Is that true that only these two situations may occur ?

Chapitre 5

Indépendance algébrique d'une fonction de Mahler et de ses dérivées

Dans ce chapitre, nous abordons par une approche galoisienne des résultats de l'article [BCZ15] concernant une solution de l'équation de Mahler

$$z^4 f\left(z^{16}\right) - (1+z+z^2)f(z^4) + f(z) = 0. \tag{5.1}$$

Cela nous permet de donner une généralisation de [BCZ15, Theorem 1], énoncée dans la Section 5.2. Par ailleurs, dans la Section 5.1, nous mentionnons qu'une généralisation de [BCZ15, Theorem 3] sur le comportement asymptotique des solutions d'équations de Mahler est déjà connue.

5.1 Étude d'une solution f

Dans cette section, nous rappelons une généralisation de [BCZ15, Theorem 3], elle est donnée dans [BC17, Theorem 1]. Ces résultats portent sur le comportement asymptotique des solutions $f(z)$ de l'équation (5.1) lorsque $z \to 1^-$ et nous le détaillons ci-dessous.

Nous considérons une équation de Mahler d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ de la forme

$$a_n(z)f\left(z^{p^n}\right) + a_{n-1}(z)f\left(z^{p^{n-1}}\right) + \ldots + a_1(z)f\left(z^p\right) + a_0(z)f(z) = 0 \tag{5.2}$$

où $a_0(z), \ldots, a_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Nous associons à cette équation le polynôme

$$P(X) = \alpha_0 X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}X + \alpha_n, \tag{5.3}$$

appelé *polynôme caractéristique*, où $\alpha_i := a_i(1)$.

Soit $f(z)$ une solution d'une équation de la forme (5.2) dont le polynôme caractéristique a des racines ayant des modules distincts. D'après [BC17, Theorem 1], il existe une racine λ de ce polynôme caractéristique telle que lorsque $z \to 1^-$,

$$f(z) = \frac{C(z)}{(1-z)^{\log_p(\lambda)}}(1+o(1))$$

où $\log_p$ désigne le logarithme en base p et $C(z)$ est une fonction analytique réelle non nulle qui satisfait, entre autres, $C(z) = C\left(z^p\right)$. En appliquant ce résultat à l'équation de Mahler (5.1) et en sachant que $\lambda := \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu := \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ sont les racines du polynôme caractéristique de l'équation de Mahler (5.1), Bell et Coons retrouvent le résultat suivant, [BCZ15, Theorem 3] :

Il existe une solution f de l'équation de Mahler (5.1) telle que

$$f(z) \underset{z\to 1^-}{=} \frac{C(z)}{(1-z)^{\lg(\rho)}}\left(1+O(1-z)\right)$$

où lg désigne le logarithme en base 2 et $\rho := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

5.2 Indépendance algébrique de f et de ses dérivées

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème suivant, qui est une généralisation de [BCZ15, Theorem 1] :

Théorème 5.2.1. *Soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}((z))$ une solution non nulle de (5.1). Alors, $f(z), f(z^4)$ et toutes leurs dérivées successives sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Pour cela, nous utilisons le résultat suivant, énoncé en [DHR18, Theorem 4.2] :

Théorème 5.2.2. *Soit $K := \cup_{j\geq 1}\mathbb{C}\left(z^{1/j}\right)$ un corps muni de l'automorphisme de corps $\phi_p : f(z) \mapsto f\left(z^p\right)$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On suppose que le groupe de Galois aux différences sur le corps K de l'équation de Mahler*

$$a_n(z)y\left(z^{p^n}\right) + a_{n-1}(z)y\left(z^{p^{n-1}}\right) + \ldots + a_0(z)y(z) = 0 \tag{5.4}$$

où $a_i(z) \in \mathbb{C}(z), a_0a_n \neq 0$ contient $SL_n\left(\mathbb{C}\right)$ et que $\frac{a_n(z)}{a_0(z)}$ est un monôme. Si $f(z) \in \mathbb{C}((z))$ est une solution non nulle de (5.4) alors les séries $f(z), f\left(z^p\right), \ldots, f\left(z^{p^{n-1}}\right)$ et toutes leurs dérivées successives sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$. En particulier, $f(z)$ est hypertranscendante sur $\mathbb{C}(z)$.

Le corps de base $\mathbb{C}$ peut être remplacé par le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ dans ce théorème. On note $K := \cup_{j\geq 1}\overline{\mathbb{Q}}\left(z^{1/j}\right)$ et on considère l'automorphisme $\phi_4 : f(z) \in K \mapsto f\left(z^4\right) \in K$.

Soit G le groupe de Galois de l'équation (5.1) sur K et H le groupe de Galois de l'équation (5.1) sur $K_{4^\infty} := \cup_{d\geq 0}\overline{\mathbb{Q}}\left(z^{1/4^d}\right)$.

On écrit l'équation (5.1) sous la forme

$$\phi_4^2(f(z)) + a(z)\phi_4(f(z)) + b(z)f(z) = 0 \quad \text{où} \quad a(z) = -\frac{1+z+z^2}{z^4}, \quad b(z) = \frac{1}{z^4}. \tag{5.5}$$

Lemme 5.2.3. *Le groupe de Galois H est irréductible.*

Démonstration. Comme rappelé en [Roq18, Lemma 40], H est irréductible si et seulement si l'équation de Riccati $u(\phi_4(u)+a)=-b$ n'a pas de solutions dans $K_{4\infty}$. Supposons que l'équation de Riccati a une solution $u \in K_{4\infty}$. Comme $u=-\frac{b(z)}{\phi_4(u)+a(z)} \in \overline{\mathbb{Q}}(z,\phi_4(u))$ alors $u \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$. On écrit $u=\frac{s}{t}$ où $s,t \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ sont premiers entre eux. L'équation de Riccati s'écrit

$$\frac{s(z)}{t(z)} \frac{(1+z+z^2)t\left(z^4\right)-z^4 s\left(z^4\right)}{t\left(z^4\right)}=1. \tag{5.6}$$

Puisque s est premier avec t, on a $\frac{(1+z+z^2)t\left(z^4\right)-z^4 s\left(z^4\right)}{t(z)} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. On distingue deux cas :

- Cas où $t(0) \neq 0$. Dans ce cas, $t\left(z^4\right)$ et z^4 sont premiers entre eux. Ainsi, $t\left(z^4\right)$ et $z^4 s\left(z^4\right)$ sont premiers entre eux. Et, l'équation (5.6) donne $\frac{s(z)}{t(z^4)} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. On a donc, par l'équation (5.6), $\frac{s(z)}{t(z^4)}=c$ et $\frac{(1+z+z^2)t\left(z^4\right)-z^4 s\left(z^4\right)}{t(z)}=c'$ où $c,c' \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$. En remplaçant $s(z)$ par $ct(z^4)$ dans cette dernière équation, on a

$$(1+z+z^2)t\left(z^4\right)-z^4 ct\left(z^{16}\right)=c't(z). \tag{5.7}$$

  Soit $k:=\deg(t) \in \mathbb{N}$. Le degré du terme de gauche de (5.7) est $16k+4$ (puisque $\deg\left(z^4 ct\left(z^{16}\right)\right)=16k+4>\deg\left((1+z+z^2)t\left(z^4\right)\right)=4k+2$) et le terme de droite a pour degré k, ce qui est une contradiction.
- Cas où $t(z)=z^n v(z)$ avec $n \geq 1$, $v(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ et $v(0) \neq 0$. L'équation (5.6) s'écrit

$$s(z)\left((1+z+z^2)z^{4(n-1)}v\left(z^4\right)-s\left(z^4\right)\right)=z^{n+4(n-1)}v(z)v\left(z^4\right). \tag{5.8}$$

  — si $n>1$, comme s et t sont premiers entre eux, $z^{4(n-1)}$ est premier avec s. Cela impose donc que $z^{4(n-1)}$ divise $s\left(z^4\right)$ ce qui est une contradiction.

  — si $n=1$, l'équation (5.8) s'écrit $s(z)\left((1+z+z^2)v\left(z^4\right)-s\left(z^4\right)\right)=t(z)v\left(z^4\right)$. Cela implique que $\frac{(1+z+z^2)v\left(z^4\right)-s\left(z^4\right)}{t(z)}, \frac{s(z)}{v(z^4)} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Leur produit vaut 1 donc $\frac{(1+z+z^2)v\left(z^4\right)-s\left(z^4\right)}{t(z)}:=c$, $\frac{s(z)}{v(z^4)}:=c'$ où $c,c' \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$. Ainsi,

$$(1+z+z^2)v\left(z^4\right)-c'v\left(z^{16}\right)=czv(z).$$

  Soit $k:=\deg(v)$. Si $k=0$, le degré du terme de gauche est 2 alors que celui du terme de droite est 1. Si $k \in \mathbb{N}^\star$, le degré du terme de gauche est $16k$ alors que le degré du terme de droite est égal à $k+1$. Dans tous les cas, on a obtenu une contradiction.

Il n'existe donc pas de solutions dans $K_{4\infty}$ à l'équation de Riccati $u(\phi_4(u)+a)=-b$. □

On dit qu'un groupe est *imprimitif* si il est conjugué à un sous-groupe de

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in \overline{\mathbb{Q}}^\star\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \delta & 0\end{pmatrix} \mid \gamma,\delta \in \overline{\mathbb{Q}}^\star\right\}.$$

Lemme 5.2.4. *Le groupe de Galois H n'est pas imprimitif.*

Démonstration. Soient a et b les coefficients de l'équation de Mahler introduits en (5.5). D'après [Roq18, Theorem 42], H est imprimitif si et seulement si l'équation

$$\left(\phi_4^2(u) + \phi_4^2\left(\frac{b}{a}\right) - \phi_4(a) + \phi_4(b)/a\right) u = -\frac{\phi_4(b)b}{a^2} \tag{5.9}$$

a une solution dans K_{4^∞}. Supposons par l'absurde que cette équation a une solution $u \in K_{4^\infty}$. Puisque u est solution de (5.9), on a $u \in \overline{\mathbb{Q}}\left(z, \phi_4^2(u)\right)$ donc $u \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$. Soit $c(z) := 1 + z + z^2$. On note $u = r/s$ où $r, s \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ sont premiers entre eux. L'équation (5.9) est équivalente à

$$\left(\phi_{16}\left(\frac{r}{s}\right) - \frac{1}{\phi_{16}(c)} + \frac{\phi_4(c)}{z^{16}} - \frac{1}{z^{12}c}\right)\frac{r}{s} = -\frac{1}{z^{12}c^2} \tag{5.10}$$

soit

$$rc\left(z^{16}c\phi_{16}(rc) - z^{16}c\phi_{16}(s) + c\phi_4(c)\phi_{16}(sc) - z^4\phi_{16}(sc)\right) = -z^4 s\phi_{16}(sc) \tag{5.11}$$

ce qui est équivalent à

$$rc^2z^{16}\phi_{16}(rc) = \phi_{16}(s)\underbrace{\left(rc^2z^{16} - rc^2\phi_4(c)\phi_{16}(c) + z^4rc\phi_{16}(c)\right.}_{\text{a pour degré } 44+d_r}\ \underbrace{\left.-z^4s\phi_{16}(c)\right)}_{\text{a pour degré } 36+d_s}\ . \tag{5.12}$$

Soient $d_r := \deg(r)$ et $d_s := \deg(s)$. Le membre de gauche a pour degré $17d_r + 52$. En prenant les degrés dans l'équation précédente, il y a trois cas possibles :

- Si $36 + d_s < 44 + d_r$ alors $17d_r + 52 = 16d_s + 44 + d_r$ donc $d_s - d_r = 1/2$ ce qui est une contradiction.
- Si $44 + d_r < 36 + d_s$ alors $d_s - d_r = 16/17$, ce qui est une contradiction.
- Si $d_r + 44 = 36 + d_s$ alors $d_s = d_r + 8$. D'après (5.12), $\phi_{16}(s)$ divise $rc^2z^{16}\phi_{16}(c)\phi_{16}(r)$. Puisque r et s sont premiers entre eux, cela implique que $\phi_{16}(s)$ divise $rc^2z^{16}\phi_{16}(c)$. Ainsi, $16d_s \leq d_r + 52 = d_s + 44$ soit $d_s \leq 44/15$ donc, comme $d_s \in \mathbb{N}$, $d_s \leq 2$. Mais alors, $d_r = d_s - 8 < 0$, ce qui est une contradiction.

Finalement, l'équation (5.9) n'a pas de solutions dans K_{4^∞}, ce qui conclut. □

Démonstration du Théorème 5.2.1. D'après les deux lemmes précédents, le groupe de Galois H de (5.1) sur K_{4^∞} est irréductible et n'est pas imprimitif. Il contient donc $SL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ (voir la classification des sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}_n\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ donnée en [Roq18, Section 6]). Par [Roq18, Theorem 7], le groupe de Galois G de (5.1) sur K contient donc $SL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$. Comme $1/b(z) = z^4$ est un monôme, par le Théorème 5.2.2, on obtient le résultat voulu. □

Proposition 5.2.5. *Le groupe de Galois G de l'équation (5.1) sur K est $SL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$.*

Démonstration. Puisque $SL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right) \subseteq G$, d'après la classification à conjugaison près des sous-groupes algébriques donnée en [Roq18, Section 6],

$$G = \left\{M \in \mathrm{GL}_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right) \mid \det(M) \in G'\right\}$$

où $G' = \det(G) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^{\star}$ est le groupe de Galois de

$$\phi_4 y = \det(A) y = z^{-4} y$$

avec A la matrice compagnon associée à l'équation (5.5) i.e. $A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{z^4} & \frac{1+z+z^2}{z^4} \end{pmatrix}$. Cette équation de Mahler a une solution $y(z) = z^{-4/3}$ dans K, le groupe de Galois G' est donc trivial. Ainsi, $G = SL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$. $\square$

Annexe A

Catégories tannakiennnes

A.1 Catégories abéliennes

Pour plus de détails sur ce qui suit, on pourra consulter [Sch72].

A.1.1 Définitions

Définition A.1.1. Dans une catégorie, un objet I est dit *initial* si pour tout objet X, il existe un unique morphisme $I \to X$. Un objet F est dit *final* si pour tout objet Y il existe un unique morphisme $Y \to F$. Un *objet nul* (ou *objet* 0) est un objet qui est à la fois initial et final.

Si des objets nuls existent dans une catégorie, on en fixe un et on le note 0.

Définition A.1.2. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *préadditive* si

- pour tous les objets X, Y de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est muni d'une structure de groupe abélien.
- pour tous les objets X, Y, Z de $\mathcal{C}$, la composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

  est distributive des deux côtés i.e.

$$(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f \text{ et } g(f_1 + f_2) = g f_1 + g f_2.$$

Pour alléger les notations, on notera parfois O les éléments neutres des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, les $O_{X,Y} : X \to Y$.

Définition A.1.3. Une catégorie préadditive est dite *additive* si il existe un objet 0 et si les produits finis existent.

Définition A.1.4. Soient X, Y deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}$. Un *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est la donnée d'un objet K de $\mathcal{C}$ et d'un morphisme $k : K \to X$ tels que

1. $f \circ k = 0$;
2. pour tout objet K' de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $k' : K' \to X$, si $f \circ k' = 0$ alors il existe un unique morphisme $u : K' \to K$ tel que $k' = k \circ u$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f"] & \\
 & K \arrow[u, "k"] \arrow[r, "0"] & Y \\
K' \arrow[uur, "k'"] \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Un *conoyau* de f, noté $\mathrm{Coker}(f)$, est la donnée d'un objet Q de $\mathcal{C}$ et d'un morphisme $q : Y \to Q$ tels que

1. $q \circ f = 0$;
2. pour tout objet Q' de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $q' : Y \to Q'$, si $q' \circ f = 0$ alors il existe un unique morphisme $v : Q \to Q'$ tel que $q' = v \circ q$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, "q'"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0"] \arrow[drr, "0"'] & Q \arrow[dr, dotted, "v"] & \\
 & & Q'
\end{tikzcd}.$$

Définition A.1.5. Une catégorie abélienne est une catégorie qui satisfait les axiomes suivants :

- A_0 Elle a un objet nul.
- A_1 Elle possède tous les produits finis.
- A_1^0 Elle possède tous les coproduits finis.
- A_2 Tout morphisme a un noyau.
- A_2^0 Tout morphisme a un conoyau.
- A_3 Tout monomorphisme est un noyau.
- A_3^0 Tout épimorphisme est un conoyau.

A.1.2 Quelques résultats

Proposition A.1.6 ([Sch72, Proposition 12.5.1]). *Si une catégorie $\mathcal{C}$ vérifie les axiomes A_0, A_2, A_2^0, A_3, A_3^0 ainsi que l'axiome A_1 (ou A_1^0) alors $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne.*

On peut donc supprimer l'axiome A_1^0 dans la définition d'une catégorie abélienne.

Définition A.1.7. On suppose que $\mathcal{C}$ est une catégorie qui vérifie A_0, A_2 et A_2^0. Soit f un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}$. L'*image de* f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est

$$\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Coker}(f)\right).$$

La *coimage de* f, notée $\mathrm{Coim}(f)$, est

$$\mathrm{Coim}(f) := \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Ker}(f)\right).$$

Proposition A.1.8. *Une catégorie est abélienne si et seulement si elle vérifie les axiomes suivants :*

- *c'est une catégorie additive ;*
- *(A_2 et A_2^0) tout morphisme a un noyau et un conoyau ;*
- *tout morphisme $f : A \to B$ admet une décomposition de la forme*

$$f = \mathrm{Im}(f)\overline{f}\mathrm{Coim}(f)$$

où $\overline{f}$ est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\overline{A} \arrow[r, "\overline{f}"] & B' \arrow[d, "\mathrm{Im}(f)"] \\
A \arrow[u, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "\mathrm{Coker}(f)"] \\
K \arrow[u, "\mathrm{Ker}(f)"] & Q
\end{tikzcd}.$$

Démonstration. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne alors elle est additive ([Sch72, Proposition 12.5.1]) et tout morphisme f admet une factorisation de la forme

$$f = \mathrm{Im}(f)\overline{f}\mathrm{Coim}(f)$$

où $\overline{f}$ est un isomorphisme ([Sch72, Proposition 12.4.9]).

Montrons la réciproque. Les axiomes A_3 et A_3^0 sont les seuls axiomes de la définition d'une catégorie abélienne (Définition A.1.5) qui ne sont pas automatiquement vérifiés. Montrons que A_3 est vérifié i.e. montrons que si f est un monomorphisme alors f est un noyau. Par hypothèse, tout morphisme $f : A \to B$ admet une décomposition de la forme

$$f = \mathrm{Im}(f)\overline{f}\mathrm{Coim}(f).$$

Si f est un monomorphisme alors $\mathrm{Ker}(f) = 0$ ainsi 1_A, le morphisme identité associé à l'objet A, est un conoyau de $\mathrm{Ker}(f)$ i.e. $1_A = \mathrm{Coim}(f)$ d'où $f = \mathrm{Im}(f)\overline{f}$. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un noyau de $\mathrm{Coker}(f)$ et que $\overline{f}$ est un isomorphisme alors f est aussi un noyau de $\mathrm{Coker}(f)$. Ainsi, l'axiome A_3 est vérifié. On montre de même que l'axiome A_3^0 est vérifié. □

Proposition A.1.9 ([Sch72, Proposition 16.2.4 (d)])**.** *Soit $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ une équivalence de catégories. Si $\mathcal{C}_1$ est une catégorie abélienne alors $\mathcal{C}_2$ est aussi une catégorie abélienne.*

A.2 Catégories tensorielles rigides.

Pour plus de détails sur les rappels qui suivent voir [DM82].

A.2.1 Caractérisation des catégories tensorielles rigides

Définition A.2.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(X, Y) \rightsquigarrow X \otimes Y$ un foncteur. Une paire $(\mathbf{1}, u)$ comprenant un objet $\mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $u : \mathbf{1} \to \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ est un *objet identité* de $(\mathcal{C}, \otimes)$ si $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $X \rightsquigarrow \mathbf{1} \otimes X$ est une équivalence de catégories.

Définition A.2.2. Une catégorie tensorielle, définie en [DM82, Definition 1.1], est *rigide* si :

- les Hom internes existent pour tous les $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, ils sont notés $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$,
- les morphismes
$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$$
sont des isomorphismes pour tous les $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
- tous les objets de $\mathcal{C}$ sont réflexifs.

Proposition A.2.3 ([Del90, §2.5])**.** *Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie tensorielle. Cette catégorie est une catégorie tensorielle rigide si et seulement si tous les objets X de $\mathcal{C}$ ont un dual $X^\vee$ et il existe des morphismes $ev : X^\vee \otimes X \to \mathbf{1}$ et $\epsilon : \mathbf{1} \to X \otimes X^\vee$ tels que les compositions*

$$X \simeq \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\epsilon \otimes id} (X \otimes X^\vee) \otimes X = X \otimes (X^\vee \otimes X) \xrightarrow{id \otimes ev} X$$

et

$$X^\vee \simeq X^\vee \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{id \otimes \epsilon} X^\vee \otimes (X \otimes X^\vee) = (X^\vee \otimes X) \otimes X^\vee \xrightarrow{ev \otimes id} X^\vee$$

soient l'identité.

A.2.2 Équivalence de catégories tensorielles rigides

Un foncteur tensoriel $(\mathcal{C}_1, \otimes_1) \to (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ est un couple (F, c) qui comprend un foncteur $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ et un isomorphisme fonctoriel

$$c_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} : F(\mathcal{X}) \otimes_2 F(\mathcal{Y}) \to F(\mathcal{X} \otimes_1 \mathcal{Y})$$

vérifiant les propriétés énoncées en [DM82, Definition 1.8].

Définition A.2.4 ([DM82, Definition 1.10])**.** Soient $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$ et $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ deux catégories tensorielles. Un foncteur tensoriel $(F, c) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \to (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ est une *équivalence de catégories tensorielles* si

$$F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$$

est une équivalence de catégories.

Cette définition est justifiée par la proposition suivante.

Proposition A.2.5 ([DM82, Proposition 1.11]). *Soit* $(F, c) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \to (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ *une équivalence de catégories tensorielles. Il existe un foncteur tensoriel*

$$(F', c') : (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \to (\mathcal{C}_1, \otimes_1)$$

et des isomorphismes de foncteurs $F' \circ F \to id_{\mathcal{C}_1}$ *et* $F \circ F' \to id_{\mathcal{C}_2}$ *commutant avec le produit tensoriel.*

Proposition A.2.6. *Soient* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *deux catégories tensorielles équivalentes. On note* $(F, c) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \to (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ *l'équivalence de catégories tensorielles. Si* $\mathcal{C}_1$ *est une catégorie tensorielle rigide alors* $\mathcal{C}_2$ *est aussi une catégorie tensorielle rigide.*

Démonstration. Cela découle du fait que (F, c) commute avec le produit tensoriel et de la caractérisation d'une catégorie tensorielle rigide donnée en Proposition A.2.3. □

A.2.3 Morphismes de foncteurs tensoriels

Définition A.2.7 ([DM82, Definition 1.12]). Soient (F, c) et (G, d) deux foncteurs tensoriels de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Un $\otimes$-*morphisme* (ou *morphisme tensoriel)* η de F dans G est la donnée pour tout objet $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $\eta_{\mathcal{X}} : F(\mathcal{X}) \to G(\mathcal{X})$ entre objets de $\mathcal{D}$ qui vérifie :

- (condition pour être une transformation naturelle) pour tout morphisme de $\mathcal{C}$, noté $f : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(\mathcal{X}_1) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{X}_1}"'] & F(\mathcal{X}_2) \arrow[d, "\eta_{\mathcal{X}_2}"] \\ G(\mathcal{X}_1) \arrow[r, "G(f)"'] & G(\mathcal{X}_2) \end{tikzcd}$$

- (condition de $\otimes$-compatibilité) pour tous les objets $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ de $\mathcal{C}$, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} F(\mathcal{X}_1) \otimes F(\mathcal{X}_2) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{X}_1} \otimes \eta_{\mathcal{X}_2}"'] & F(\mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2) \arrow[d, "\eta_{\mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2}"] \\ G(\mathcal{X}_1) \otimes G(\mathcal{X}_2) \arrow[r, "d"'] & G(\mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1}' \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & F(\mathbf{1}) \arrow[d, "\eta_{\mathbf{1}}"] \\ \mathbf{1}' \arrow[r, "\simeq"'] & G(\mathbf{1}) \end{tikzcd}$$

  où $\mathbf{1}'$, $F(\mathbf{1})$ et $G(\mathbf{1})$ sont des objets identités de $\mathcal{D}$ et les applications horizontales sont les uniques isomorphismes compatibles avec les structures d'objets identités de $\mathcal{C}'$.

On les note $\mathrm{Hom}^{\otimes}(F, G)$.

A.3 Catégories tannakiennes

D'après [DM82, Definition 1.15] et [DM82, Proposition 1.16], on a la définition suivante.

Définition A.3.1. Une *catégorie tensorielle abélienne rigide* est une catégorie tensorielle rigide $(\mathcal{C}, \otimes)$ telle que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne.

Définition A.3.2 ([DM82, Definition 2.19 et Definition 3.7])**.** Soit K/k une extension de corps. Une catégorie tensorielle abélienne rigide $\mathcal{C}$ telle que $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ est une *catégorie tannakienne sur* k si elle est munie d'un foncteur tensoriel

$$\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f\,(K)$$

qui est k-linéaire, fidèle et exact. Le foncteur ω est un *foncteur fibre* pour $\mathcal{C}$ à valeurs dans K.

Une catégorie tannakienne sur k est une *catégorie tannakienne neutre sur* k si elle admet un foncteur fibre à valeurs dans k,

$$\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f\,(k)\,.$$

Exemple A.3.3. Soit G un schéma en groupes affine sur k. La catégorie $\mathcal{R}ep_k\,(G)$ des représentations de dimension finie de G sur k est une catégorie tannakienne neutre sur k.

Soient $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie tensorielle, R une k-algèbre et Mod_R la catégorie des R-modules de type fini. On considère le foncteur tensoriel canonique $\Phi_R : \mathrm{Vect}^f(k) \to \mathrm{Mod}_R$, $V \in \mathrm{Obj}\left(\mathrm{Vect}^f(k)\right) \rightsquigarrow V \otimes_k R$.

Définition A.3.4. Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k)$ deux foncteurs tensoriels. Le foncteur $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}\,(F, G)$ est le foncteur de k-algèbres tel que pour toutes les k-algèbres R,

$$\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}\,(F, G)\,(R) := \mathrm{Iso}^{\otimes}\,(\Phi_R \circ F, \Phi_R \circ G)\,.$$

On écrit

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\,(F) := \underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}\,(F, F)\,.$$

Le théorème principal de la théorie des catégories tannakiennes est le suivant (voir [DM82, Theorem 2.11]).

Théorème A.3.5. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k et $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}^f(k)$ un foncteur fibre. Alors :*

- *le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\,(\omega)$ est représenté par un schéma en groupes affine G ;*
- *le foncteur*

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} \to Rep_k(G) \\ &\begin{cases} \mathcal{X} \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) & \rightsquigarrow \rho : g \in G \mapsto g\,(\mathcal{X}) \in \mathrm{Aut}\,(\omega\,(\mathcal{X})) \\ f \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}) & \rightsquigarrow \omega(f) \end{cases} \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

Bibliographie

[AB17] Boris Adamczewski and Jason P. Bell. A problem about Mahler functions. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 17 :1301–1355, 2017.

[ADH21] Boris Adamczewski, Thomas Dreyfus, and Charlotte Hardouin. Hypertranscendence and linear difference equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 34 :475–503, 2021.

[AF17] Boris Adamczewski and Colin Faverjon. Méthode de Mahler : relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 115 :55–90, 2017.

[AF18] Boris Adamczewski and Colin Faverjon. Méthode de Mahler, transcendance et relations linéaires : aspects effectifs. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 30 :557–573, 2018.

[AHMRW11] Primitivo B. Acosta-Humánez, Juan J. Morales-Ruiz, and Jacques-Arthur Weil. Galoisian approach to integrability of Schrödinger equation. *Rep. Math. Phys.*, 67(3) :305–374, 2011.

[AOT14] Benjamin Antieau, Alexey Ovchinnikov, and Dmitry Trushin. Galois theory of difference equations with periodic parameters. *Comm. Algebra*, 42(9) :3902–3943, 2014.

[Arr17] Carlos E. Arreche. Computation of the difference-differential Galois group and differential relations among solutions for a second-order linear difference equation. *Commun. Contemp. Math.*, 19(6) :1650056, 42, 2017.

[AS92] Jean-Paul Allouche and Jeffrey Shallit. The ring of k-regular sequences. *Theoret. Comput. Sci.*, 98(2) :163–197, 1992.

[AS03] Jean-Paul Allouche and Jeffrey Shallit. *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations*. Cambridge Univ. Press, 2003.

[Bar89] Moulay A. Barkatou. On the reduction of linear systems of difference equations. In *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '89, pages 1–6, 1989.

[Bar95] Moulay A. Barkatou. A rational version of Moser's algorithm. In *Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '95, pages 297–302, 1995.

[BBP08] Moulay A. Barkatou, Gary Broughton, and Eckhard Pflügel. Regular systems of linear functional equations and applications. In *Proceedings of the*

Twenty-First International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC '08, pages 15–22, 2008.

[BC17] Jason P. Bell and Michael Coons. Transcendence tests for Mahler functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(3) :1061–1070, 2017.

[BCR13] Jason P. Bell, Michael Coons, and Eric Rowland. The rational-transcendental dichotomy of Mahler functions. *J. Integer Seq.*, 16(2) :Article 13.2.10, 11, 2013.

[BCWDV16] Moulay Barkatou, Thomas Cluzeau, Jacques-Arthur Weil, and Lucia Di Vizio. Computing the Lie algebra of the differential Galois group of a linear differential system. In *Proceedings of the 2016 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 63–70, 2016.

[BCZ15] Richard P. Brent, Michael Coons, and Wadim Zudilin. Algebraic independence of Mahler functions via radial asymptotics. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2016(2) :571–603, 2015.

[Bec94] Paul-Georg Becker. k-regular power series and Mahler-type functional equations. *J. Number Theory*, 49(3) :269–286, 1994.

[BH89] Frits Beukers and Gert Heckman. Monodromy for the hypergeometric function nfn-1. *Invent. Math.*, 95(2) :325–354, 1989.

[BHHW21] Annette Bachmayr, David Harbater, Julia Hartmann, and Michael Wibmer. Free differential Galois groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374(6) :4293–4308, 2021.

[Bir13] George D. Birkhoff. Equivalent singular points of ordinary linear differential equations. *Math. Ann.*, 74 :134–139, 1913.

[Bir30] George D. Birkhoff. Formal theory of irregular linear difference equations. *Acta Math.*, 54 :205 – 246, 1930.

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[BP96] Manuel Bronstein and Marko Petkovšek. An introduction to pseudo-linear algebra. *Theoret. Comput. Sci.*, 157(1) :3–33, 1996.

[BS05] Alin Bostan and Éric Schost. Polynomial evaluation and interpolation on special sets of points. *J. Complexity*, 21(4) :420–446, 2005.

[CDDM18] Frédéric Chyzak, Thomas Dreyfus, Philippe Dumas, and Marc Mezzarobba. Computing solutions of linear Mahler equations. *Math. Comp.*, 87 :2977–3021, 2018.

[CKMFR80] Gilles Christol, Teturo Kamae, Michel Mendès France, and Gérard Rauzy. Suites algébriques, automates et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 108 :401–419, 1980.

[Cob68] Alan Cobham. On the Hartmanis-Stearns problem for a class of tag machines. In *9th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (swat 1968)*, pages 51–60, 1968.

[Coh65] Richard M. Cohn. *Difference Algebra*. Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers, 1965.

[CS07] Phyllis J. Cassidy and Michael F. Singer. Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups. In *Differential equations and quantum groups*, volume 9 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 113–155. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[Del90] Pierre Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[DHR18] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, and Julien Roques. Hypertranscendence of solutions of Mahler equations. *J. Eur. Math. Soc.*, 20(9) :2209–2238, 2018.

[DM82] Pierre Deligne and James S. Milne. Tannakian categories. In *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Math.*, pages 101–228. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982.

[DM89] Anne Duval and Claude Mitschi. Matrices de Stokes et groupe de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées. *Pacific J. Math.*, 138(1) :25 – 56, 1989.

[Dre14a] Thomas Dreyfus. A density theorem in parameterized differential Galois theory. *Pacific J. Math.*, 271(1) :87 – 141, 2014.

[Dre14b] Thomas Dreyfus. Computing the Galois group of some parameterized linear differential equation of order two. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(4) :1193–1207, 2014.

[Dum93] Philippe Dumas. *Récurrences mahlériennes, suites automatiques, études asymptotiques*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1993.

[DVHW14] Lucia Di Vizio, Charlotte Hardouin, and Michael Wibmer. Difference Galois theory of linear differential equations. *Adv. Math.*, 260 :1–58, 2014.

[DW19] Thomas Dreyfus and Jacques-Arthur Weil. Computing the Lie algebra of the differential Galois group : the reducible case. preprint, 2019.

[Eti95] Pavel I. Etingof. Galois groups and connection matrices of q-difference equations. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 1 :1–9, 1995.

[Fen18] Ruyong Feng. On the computation of the Galois group of linear difference equations. *Math. Comp.*, 87(310) :941–965, 2018.

[Fer19] Gwladys Fernandes. Regular extensions and algebraic relations between values of Mahler functions in positive characteristic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372 :7111–7140, 2019.

[FP21] Colin Faverjon and Marina Poulet. An algorithm to determine regular singular Mahler systems. preprint, 2021.

[Hen98] Peter A. Hendriks. An algorithm determining the difference Galois group of second order linear difference equations. *J. Symbolic Comput.*, 26(4) :445–461, 1998.

[Hil87] Abdelaziz Hilali. *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987.

[HMO17] Charlotte Hardouin, Andrei Minchenko, and Alexey Ovchinnikov. Calculating differential Galois groups of parametrized differential equations, with applications to hypertranscendence. *Math. Ann.*, 368(1-2) :587–632, 2017.

[HS99] Peter A. Hendriks and Michael F. Singer. Solving difference equations in finite terms. *J. Symbolic Comput.*, 27(3) :239–259, 1999.

[HS08] Charlotte Hardouin and Michael F. Singer. Differential Galois theory of linear difference equations. *Math. Ann.*, 342(2) :333–377, 2008.

[HSS16] Charlotte Hardouin, Jacques Sauloy, and Michael F. Singer. *Galois theories of linear difference equations : an introduction*, volume 211 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. Papers from the courses held at the CIMPA Research School in Santa Marta, July 23–August 1, 2012.

[Kol48] Ellis R. Kolchin. Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. *Ann. of Math.*, 49(1), 1948.

[Kov71] Jerald J. Kovacic. On the inverse problem in the Galois theory of differential fields : II. *Ann. of Math.*, 93(2) :269–284, 1971.

[Kov73] Jerald J. Kovacic. Pro-algebraic groups and the Galois theory of differential fields. *Amer. J. Math.*, 95(3) :507–536, 1973.

[Kov86] Jerald J. Kovacic. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 2(1) :3–43, 1986.

[Kub77] Kenneth K. Kubota. On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values. *Math. Ann.*, 227 :9–50, 1977.

[Lag70] Joseph-Louis Lagrange. Réflexions sur la résolution algébrique des équations. *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1770.

[Lox84] John H. Loxton. A method of Mahler in transcendence theory and some of its applications. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 29(1) :127–136, 1984.

[LvdP77] John H. Loxton and Alfred J. van der Poorten. Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler. In *Transcendence theory : advances and applications (Proc. Conf., Univ. Cambridge, Cambridge, 1976)*, pages 211–226, 1977.

[Mah29] Kurt Mahler. Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, 101(1) :342–366, 1929.

[Mah30a] Kurt Mahler. Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen. *Math. Z.*, 32(1) :545–585, 1930.

[Mah30b] Kurt Mahler. Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen. *Math. Ann.*, 103(1) :573–587, 1930.

[Mar66] Morris Marden. *Geometry of polynomials.* Mathematical Surveys, No. 3. American Mathematical Society, Providence, R.I., second edition, 1966.

[Mas82] David W. Masser. A vanishing theorem for power series. *Invent. Math.*, 67 :275–296, 1982.

[MF80] Michel Mendès France. Nombres algébriques et théorie des automates. *Enseign. Math.*, 26 :193–199, 1980.

[Mit96] Claude Mitschi. Differential Galois groups of confluent generalized hypergeometric equations : An approach using Stokes multipliers. *Pacific J. Math.*, 176(2) :365–405, 1996.

[Mos59] Jürgen Moser. The order of a singularity in Fuchs' theory. *Math. Z.*, 72 :379–398, 1959.

[MS96] Claude Mitschi and Michael F. Singer. Connected linear groups as differential Galois groups. *J. Algebra*, 184(1) :333–361, 1996.

[Nis82] Kumiko Nishioka. On a problem of Mahler for transcendency of function values. *J. Aust. Math. Soc. (Series A)*, 33(3) :386–393, 1982.

[Nis96] Kumiko Nishioka. *Mahler Functions and Transcendence*, volume 1631 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[NPQ12] Pierre Nguyen Phu Qui. *Équations de Mahler et hypertranscendance.* PhD thesis, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2012.

[OW15] Alexey Ovchinnikov and Michael Wibmer. σ-Galois theory of linear difference equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2015(12) :3962–4018, 2015.

[Pel20] Federico Pellarin. An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence. In *t-Motives : Hodge Structures, Transcendence and Other Motivic Aspects*, pages 297–349. EMS Ser. Congr. Rep., 2020.

[Phi15] Patrice Philippon. Groupes de Galois et nombres automatiques. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 92(3) :596–614, 2015.

[Pou21] Marina Poulet. A density theorem for the difference Galois groups of regular singular Mahler equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2021.

[Pra83] Cornelis Praagman. The formal classification of linear difference operators. *Indag. Math.*, 86(2) :249–261, 1983.

[Ran92] Bernard Randé. *Équations fonctionnelles de Mahler et applications aux suites p-régulières.* PhD thesis, Université Bordeaux 1, 1992.

[Roq08] Julien Roques. Galois groups of the basic hypergeometric equations. *Pacific J. Math.*, 235(2) :303 – 322, 2008.

[Roq18] Julien Roques. On the algebraic relations between Mahler functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(1) :321–355, 2018.

[Roq20] Julien Roques. On the local structure of Mahler systems. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2021(13) :9937–9957, 2020.

[Ruf99] Paolo Ruffini. *Teoria Generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto.* Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna, 1799.

[Sau99] Jacques Sauloy. *Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1999.

[Sau00] Jacques Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4) :1021–1071, 2000.

[Sau03] Jacques Sauloy. Galois theory of Fuchsian q-difference equations. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, Ser. 4, 36(6) :925–968, 2003.

[Sch72] Horst Schubert. *Categories.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972. Translated from the German by Eva Gray.

[Ser60] Jean-Pierre Serre. Groupes proalgébriques. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 7 :5–67, 1960.

[Sto03] Arne Storjohann. High-order lifting and integrality certification. *J. Symbolic Comput.*, 36(3) :613–648, 2003. ISSAC 2002.

[TT79] Carol Tretkoff and Marvin Tretkoff. Solution of the inverse problem of differential Galois theory in the classical case. *Amer. J. Math.*, 101(6) :1327–1332, 1979.

[Van71] Alexandre-Théophile Vandermonde. Mémoire sur la résolution des équations. *Mémoires de l'Académie royale des sciences (Paris)*, 1771.

[vdH07] Joris van der Hoeven. Around the numeric-symbolic computation of differential Galois groups. *J. Symbolic Comput.*, 42(1-2) :236–264, 2007.

[vdPS97] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[vdPS03] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[War70] Edward Waring. *Meditationes Algebraicae.* 1770.

[ZLS15] Wei Zhou, George Labahn, and Arne Storjohann. A deterministic algorithm for inverting a polynomial matrix. *J. Complexity*, 31(2) :162–173, 2015.

Équations de Mahler : groupes de Galois et singularités régulières

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude des équations de Mahler et des solutions de ces équations, appelées fonctions de Mahler. Des exemples classiques de fonctions de Mahler sont les séries génératrices des suites automatiques.

La première partie de cette thèse porte sur les aspects galoisiens des équations de Mahler. Notre résultat principal est un analogue pour ces équations du théorème de densité de Schlesinger selon lequel la monodromie d'une équation différentielle à points singuliers réguliers est Zariski-dense dans son groupe de Galois différentiel. Pour cela, nous commençons par attacher une paire de matrices de connexion à chaque équation de Mahler singulière régulière. Ces matrices nous permettent de construire un sous-groupe du groupe de Galois de l'équation de Mahler et nous montrons que ce sous-groupe est Zariski-dense dans le groupe de Galois.

La seule hypothèse de ce théorème de densité est le caractère singulier régulier de l'équation de Mahler considérée. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à la construction d'un algorithme qui permet de reconnaître si une équation de Mahler est singulière régulière.

Mots clés : Équations de Mahler, théorie de Galois, théorème de densité, singularités régulières.

Mahler equations : Galois groups and regular singularities

Abstract : This thesis is devoted to the study of Mahler equations and the solutions of these equations, called Mahler functions. Classic examples of Mahler functions are the generating series of automatic sequences.

The first part of this thesis deals with the Galoisian aspects of Mahler equations. Our main result is an analog for Mahler equations of the Schlesinger's density theorem according to which the monodromy of a regular singular differential equation is Zariski-dense in its differential Galois group. To this end, we start by attaching a pair of connection matrices to each regular singular Mahler equation. These matrices enable us to construct a subgroup of the Galois group of the Mahler equation and we prove that this subgroup is Zariski-dense in the Galois group.

The only assumption of this density theorem is the regular singular condition on the considered Mahler equation. The second part of this thesis is devoted to the construction of an algorithm which recognizes whether or not a Mahler equation is regular singular.

Keywords : Mahler equations, Galois theory, density theorem, regular singularities.

Image en couverture : Photographie prise aux Prats des Thuiles (04) par l'auteure de la thèse.

ED 512

INFOMATHS

Ecole doctorale

UNIVERSITÉ DE LYON